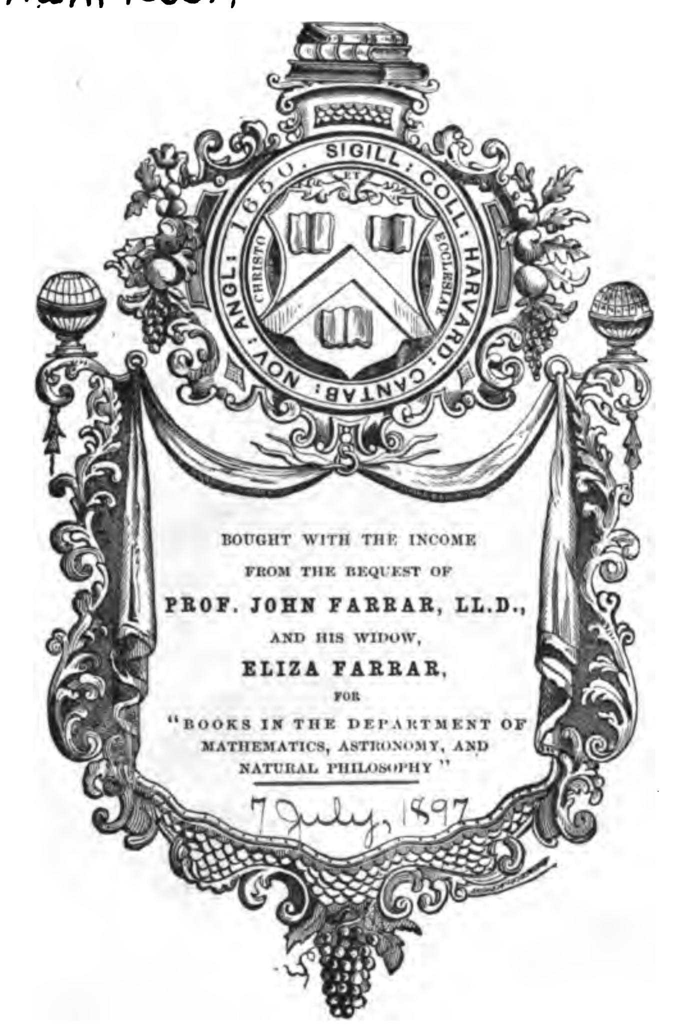

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
7 July, 1897



Heinrich Bork

Periodische Dezimalbrüche

Beilage zum V. Jahresbericht des Königlichen Prinz Heinrichs-Gymnasiums in Berlin

BERLIN
Druck von A. W. Hayn's Erben
1895.

1895. Progr. No. 67.

Auf periodische Dezimalbrüche führt der elementare Rechenunterricht. Bei dem Versuch, gemeine Brüche dadurch in Dezimalbrüche zu verwandeln, dafs der Zähler durch den Nenner dividiert wird, findet der Schüler gelegentlich, dafs im Quotienten eine Reihe von Ziffern sich fortgesetzt wiederholt; so ist z. B. $\frac{6}{13} = 6 : 13 = 0,\overline{461538}\,461538 \ldots\ldots$ Die Reihe der sich wiederholenden Ziffern heifst **Periode.**

Diese periodischen Dezimalbrüche zeigen mancherlei bemerkenswerte Eigenschaften, von denen einige wenige, sehr auf der Hand liegende, auch in den Schulbüchern angegeben sind. Andere sind durch Induktion leicht aufzufinden, aber weniger leicht zu begründen. Ihre Aufdeckung wird gewöhnlich der höheren Arithmetik oder Zahlentheorie überlassen. In zahlentheoretischen Originalarbeiten zerstreut, so unter älteren bei Wallis, Euler, Robertson, Johann Bernoulli, Gauss, in Zeitschriften und Gelegenheitsschriften*) findet sich allerlei über die interessanten Eigenschaften dieser Zahlengebilde. Naturgemäfs wird in diesen Abhandlungen vielfach die zahlentheoretische Terminologie gebraucht, so dafs sie für den Nichtmathematiker gröfstenteils unverständlich sind.

An dieser Stelle soll ohne die Voraussetzung zahlentheoretischer Kenntnisse von den periodischen Dezimalbrüchen gehandelt und nur angenommen werden, dafs der Leser in der elementaren Arithmetik unterrichtet ist. Wo etwa Begriffe und Hilfsmittel der Zahlentheorie benutzt werden, sollen sie erklärt werden. Insbesondere ist also dieses ergänzende Kapitel zur elementaren Arithmetik, einem Schulprogramm beigegeben, auch den älteren Schülern des Gymnasiums zugänglich. Das gilt zumal vom ersten Abschnitt (§§ 1—11), in welchem auch kein Hilfssatz unbewiesen geblieben ist, während im zweiten Abschnitt der Kürze wegen verschiedene bekannte zahlentheoretische Sätze ohne Beweis angeführt und benutzt sind.

Der Mathematiker wird in dieser Abhandlung nicht viel Neues finden, Bekanntes hier und da in neuer Darstellung und Entwicklung. Wertvoll wird den Liebhabern der Zahlentheorie der Anhang sein, in welchem für die Primzahlen unter 100000 die Gröfse ihrer Periode angegeben ist. Herr Dr. Friedrich Kefsler (Provinzialgewerbeschuldirektor a. D. in Wiesbaden, Kapellenstrafse 26a) hat diese Tabelle berechnet und den ersten Abdruck an dieser Stelle gütigst gestattet. Die Perioden-Tabelle, welche der Astronom Burckhardt seiner 1817 in Paris erschienenen „Table des Diviseurs pour tous les nombres depuis 1 à 3036000" als Anhang beigefügt hat (abgedruckt auch im Canon Arithmeticus von Jacobi, Berlin 1839), enthält der Reihe nach nur die Primzahlen bis 2543 und darüber hinaus noch einige aufser der Reihe. Bis 15000 reicht die Perioden-Tabelle in der Programm-Arbeit von Reuschle, doch ist diese mit vielen Fehlern behaftet. Einzelne Gebiete des weiteren Zahlenraumes sind aufserdem noch von Anderen, bis 40000 von dem in Houghton le Spring, Durham, 1882 verstorbenen Mr. William Shanks (bis 30000 publiziert in den Proceedings der Royal Society 1874), von 60000 bis 75000 von

*) z. B. Reuschle. Neue zahlentheoretische Tabellen u. s. w. (Programm von Stuttgart. 1856), A. Rieke. Versuch über die periodischen Brüche. (Programm von Riga. 1887), J. Mayer. Über die Gröfse der Periode eines unendlichen Dezimalbruches oder die Congruenz $10^x \equiv 1 \pmod{P}$. (Programm von Burghausen. 1888).

Professor Geo Salmon, Provost of the Trinity College, Dublin, berechnet worden. Die Ergebnisse dieser Rechnungen haben dem erstgenannten Herrn Verfasser, der auch den in der Tafel des Anhangs befolgten abgekürzten Modus der Registrierung einführte, behufs der Erhöhung der Zuverlässigkeit seiner auch von ihm selbst kontrollierten Ergebnisse der eigenen Rechnungen zu Gebote gestanden.

Erster Abschnitt.

Die Haupteigenschaften der periodischen Dezimalbrüche.

Wir gehen nun also zur Beschäftigung mit der Frage über: welche Zahlengebilde entstehen, wenn man irgend einen Bruch $\frac{m}{n}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln unternimmt? Vorausgesetzt soll für jeden zu verwandelnden Bruch sein, dafs es ein echter Bruch ist ($m < n$), sowie dafs m und n relativ prim sind, d. h. keinen gemeinsamen Faktor haben. Denn da jeder unechte Bruch sich in eine gemischte Zahl verwandeln und jeder Bruch, dessen Zähler und Nenner einen gemeinsamen Faktor haben, sich mit diesem Faktor heben läfst, kann diese Beschränkung offenbar ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit der Betrachtungen gemacht werden.

§ 1. Verwandlung von Brüchen von der Form $\frac{m}{2^\alpha \cdot 5^\beta}$.

Brüche von dieser Form, deren Nenner also keinen anderen Faktor als 2 und 5 enthält, können offenbar durch Erweitern in Dezimalbrüche verwandelt werden. Jenachdem $\alpha > \beta$ oder $\alpha < \beta$ ist, wird man mit $5^{\alpha-\beta}$ oder mit $2^{\beta-\alpha}$ erweitern und dadurch den Bruch in die Form $\frac{m \cdot 5^{\alpha-\beta}}{(2 \cdot 5)^\alpha}$ oder $\frac{m \cdot 2^{\beta-\alpha}}{(2 \cdot 5)^\beta}$, also in die Form eines Dezimalbruchs bringen.

Beispiele:
$$\frac{3}{16} = \frac{3}{2^4} = \frac{3 \cdot 5^4}{10^4} = \frac{1875}{10000} = 0{,}1875,$$
$$\frac{17}{125} = \frac{17}{5^3} = \frac{17 \cdot 2^3}{10^3} = \frac{136}{1000} = 0{,}136,$$
$$\frac{123}{400} = \frac{123}{2^4 \cdot 5^2} = \frac{123 \cdot 5^2}{10^4} = \frac{3075}{10000} = 0{,}3075,$$
$$\frac{9}{12500} = \frac{9}{2^2 \cdot 5^5} = \frac{9 \cdot 2^3}{10^5} = \frac{72}{100000} = 0{,}00072.$$

Es gilt also der folgende Satz:

I. Ein gemeiner Bruch von der Form $\frac{m}{2^\alpha \cdot 5^\beta}$ giebt verwandelt einen **endlichen Dezimalbruch** (abbrechenden Dezimalbruch) mit so vielen Dezimalstellen, als der gröfsere der Exponenten α und β angiebt.

§ 2. Verwandlung von Brüchen von der Form $\frac{m}{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n}$.

In dieser Form bedeutet n eine zu 10 relativ prime Zahl.

Ein solcher Bruch läfst sich zunächst durch Erweitern auf die Form $\frac{m_1}{10^\gamma \cdot n}$ bringen (wo γ für den gröfseren der beiden Exponenten α und β gesetzt ist). Der letztere Bruch aber ist $= \frac{m_1}{10^\gamma} : n$ und läfst sich weiterhin stets als Summe zweier Brüche mit den Nennern 10^γ und

$10^\gamma \cdot n$ darstellen. Ist nämlich durch Division von m_1 durch n ermittelt $m_1 = q \cdot n + m_2$ (wo natürlich q auch den Wert 0 haben kann), so erhält man durch Division dieser Gleichung durch 10^γ und n

$$\frac{m_1}{10^\gamma} : n = \frac{q}{10^\gamma} + \frac{m_2}{10^\gamma \cdot n} = \frac{q}{10^\gamma} + \frac{m_2}{n} : 10^\gamma$$

(wobei die Bedingungen, dafs m_2 und n relative Primzahlen seien, und dafs $m_2 < n$ sei, stets erfüllt sind).

Der Bruch nimmt also die Form einer Summe an, deren erster Summand ein endlicher Dezimalbruch mit γ Dezimalstellen und deren zweiter Summand der 10^γte Teil desjenigen Dezimalbruchs ist, der durch Verwandlung des Bruches $\frac{m_2}{n}$ erhalten wird. Der letztere Dezimalbruch kann kein endlicher sein, sonst müfste ja auch durch Erweitern der Bruch $\frac{m_2}{n}$ mit dem gegen 10 relativ primen Nenner n sich in einen Bruch verwandeln lassen, dessen Nenner eine dekadische Einheit (10, 100, 1000 . . .) wäre, was offenbar unmöglich ist. Von diesen unendlichen, und zwar periodischen Dezimalbrüchen soll in den nächsten Paragraphen die Rede sein.

Den durch Verwandlung eines Bruches von der Form $\frac{m}{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n}$ erhaltenen Dezimalbruch nennt man einen **unrein - periodischen Dezimalbruch;** er nimmt nach dem Gesagten die Form an

$$0,\underbrace{\ldots\ldots}_{\gamma \text{ Ziffern}}\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{unendlicher Dezimalbruch aus } \frac{m_2}{n} \text{ erhalten.}}$$

Beispiel: $\frac{7}{880} = \frac{7}{80} : 11 = \frac{7}{2^4 \cdot 5} : 11 = 0{,}0875 : 11 = 0{,}0869 : 11 + 0{,}0006 : 11$
$= 0{,}0079 + 0{,}00005454 \ldots = 0{,}0079\overline{54}54 \ldots$

Es gilt demnach der folgende Satz:

II. Die Verwandlung eines Bruches von der Form $\frac{m}{2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot n}$ (wo wenigstens eine der Zahlen α und β nicht gleich Null ist) liefert einen unrein-periodischen Dezimalbruch mit soviel Ziffern vor der Periode, als der gröfsere der Exponenten α und β Einheiten enthält.

§ 3. Verwandlung von Brüchen von der Form $\frac{m}{n}$, wo n eine zu 10 relativ prime Zahl ist.

Dividiert man, um $\frac{m}{n}$ in einen Dezimalbruch zu verwandeln, die Zahl m durch eine zu ihr relativ prime Zahl n, so können offenbar nur die Zahlen $1, 2, 3 \ldots n - 1$ als Reste bei der Division auftreten, in irgend einer Reihenfolge und ohne dafs es nötig wäre, dafs jede Zahl dieser Reihe auch wirklich als Rest auftritt. In einem späteren § wird gezeigt werden, dafs alle diese $n - 1$ Zahlen überhaupt nur dann als Reste auftreten können, wenn n eine Primzahl ist. Treten sie wirklich alle als Reste auf, so kann doch offenbar nach $n - 1$ Divisionen nur ein Rest auftreten, der schon einmal da war. Sobald dies aber geschieht, erscheinen auch die weiteren Dezimalstellen (und die weiteren Reste) wieder in derselben Reihenfolge, wie beim ersten Mal — man erhält eine **Periode.**

Beispiele: 1) $\frac{9}{13} = 9:13 = 0,\overline{692307}692307\ldots\ldots$

120
30
40
100
9
⋮

2) $\frac{6}{7} = 6:7 = 0,\overline{857142}857142\ldots\ldots$

40
50
10
30
20
6
⋮

Die Anzahl der sich wiederholenden Ziffern, die also kleiner als $n-1$ (1. Beispiel) oder gleich $n-1$ (2. Beispiel) sein kann, wird die **Gröfse der Periode** des Bruches $\frac{m}{n}$ genannt (und in der Folge mit e bezeichnet).

Nun ist von vornherein einzusehen, dafs die Gröfse der Periode des Bruches $\frac{m}{n}$ ganz unabhängig ist von dem Zähler m, also nur bestimmt ist durch den Nenner n. Denn sei e die Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{n}$, also $1:n = 0,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{e \text{ Ziffern}}$ so können ja die Dezimalbrüche für $\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\ldots\ldots\frac{n-1}{n}$ auch durch Multiplikation des für $\frac{1}{n}$ erhaltenen Dezimalbruchs mit $2, 3\ldots . n-1$ erhalten werden. Da aber durch diese Multiplikation der e Ziffern der $k$ten Periode die $k-1$te Periode nicht beeinflufst werden (ihre letzte Ziffer nicht erhöht werden) kann, denn schon der Grenzwert von $0,9999\ldots$ ist ja $= 1$, während wir es nur mit echten Brüchen zu thun haben, so sieht man ein, dafs die Gröfse der Periode jedes Bruches $\frac{m}{n}$ gleich derjenigen des Bruches $\frac{1}{n}$ ist.

Beispiel:

$$\frac{1}{13} = 1:13 = 0,\overline{076923}076923\ldots\ldots$$
$$\frac{2}{13} = \frac{1}{13}\cdot 2 = 0,\overline{153846}153846\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{9}{13} = \frac{1}{13}\cdot 9 = 0,\overline{692307}692307\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{12}{13} = \frac{1}{13}\cdot 12 = 0,\overline{923076}923076\ldots\ldots$$

Die Frage nach der Gröfse der Periode eines Bruches $\frac{m}{n}$ ist also darauf zurückgeführt: wie hängt die Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{n}$ vom Nenner n ab?

Da bei Ausführung der Division $1,000\ldots : n$ die Periode eintritt, wenn in der Reihe der Divisionen $10:n$, $100:n$, $1000:n$, $10^4:n$, $10^5:n\ldots\ldots$ wieder 1 als Rest auftritt, so wird die Gröfse e der Periode durch die Gleichung $10^e = n \cdot x + 1$, das heifst durch die Bedingung bestimmt, dafs $10^e - 1$ durch n ohne Rest teilbar sei.

Für die weitere Untersuchung der Frage nach der Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{n}$ empfiehlt es sich, die folgenden drei Fälle zu unterscheiden:

I. Der Nenner ist eine Primzahl, p,
II. Der Nenner ist eine Potenz einer Primzahl, p^{α},
III. Der Nenner ist eine zusammengesetzte Zahl, $p^{\alpha} \cdot p_1^{\beta} \cdot p_2^{\gamma}$.

§ 4. Die Gröfse der Periode der Brüche $\frac{1}{p}$, deren Nenner eine Primzahl ist.

Die Gröfse der Periode (e) kann ihren höchsten Wert $p - 1$ nur dann erreichen, wenn in der Reihe der Zahlen 9, 99, 999..... $\underbrace{9999.....}_{p-1 \text{ Neunen}}$ (unter denen nach dem oben Gesagten eine sicher durch p teilbar ist) erst die $p - 1$te Zahl durch p teilbar ist. Die Zerlegung der ersten 16 Zahlen dieser Reihe in Primfaktoren ergiebt nun:

$$
\begin{aligned}
9 &= 3^2 \\
99 &= 3^2 \cdot 11 \\
999 &= 3^3 \cdot 37 \\
9999 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 101 \\
99999 = 10^5 - 1 &= 3^2 \cdot 41 \cdot 271 \\
10^6 - 1 &= 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \\
10^7 - 1 &= 3^2 \cdot 239 \cdot 4649 \\
10^8 - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 137 \\
10^9 - 1 &= 3^4 \cdot 37 \cdot 333667 \\
10^{10} - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 9091 \\
10^{11} - 1 &= 3^2 \cdot 21649 \cdot 513239 \\
10^{12} - 1 &= 3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 101 \cdot 9901 \\
10^{13} - 1 &= 3^2 \cdot 53 \cdot 79 \cdot 265371653 \\
10^{14} - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 239 \cdot 4649 \cdot 909091 \\
10^{15} - 1 &= 3^3 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 271 \cdot 2906161 \\
10^{16} - 1 &= 3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 73 \cdot 101 \cdot 103 \cdot 5882353.
\end{aligned}
$$

Hiernach hat die Primzahl 3 eine 1ziffrige, 11 eine 2ziffrige, 37 eine 3ziffrige, 101 eine 4ziffrige, 41 und 271 eine 5ziffrige, 7 und 13 eine 6ziffrige Periode u. s. f.*) Die Gröfse der Periode erreicht also innerhalb dieses Kreises nur für $p = 7$ und $p = 17$ ihren höchsten möglichen Wert $p - 1$.

Bei aufmerksamer Betrachtung obiger Tabelle scheint sich nun zu ergeben, dafs in den weit zahlreicheren übrigen Fällen, wo die Gröfse der Periode $e < p - 1$ ist, dieses e ein durch Division mit einer ganzen Zahl entstandener Teil von $p - 1$, ist: $e = \frac{p-1}{d}$. So ist $e_{\text{für } 3} = 1 = \frac{2}{2}$, $e_{\text{für } 11} = 2 = \frac{10}{5}$, $e_{\text{für } 37} = 3 = \frac{36}{12}$, $e_{\text{für } 101} = 4 = \frac{100}{25}$, $e_{\text{für } 41} = 5 = \frac{40}{8}$, $e_{\text{für } 73} = 8 = \frac{72}{9}$, $e_{\text{für } 137} = 8 = \frac{136}{17}$ u. s. f.

*) Jede in dieser Tabelle nicht vorkommende Primzahl hat eine mehr als 16ziffrige Periode.

Es gilt nun diesen zunächst durch Induktion gefundenen Satz zu beweisen, was folgendermafsen geschehen kann:

Angenommen es wiederhole sich bei der Verwandlung des Bruches $\frac{1}{n}$ der Rest 1 nach e Divisionen, und es sei die Reihe der Reste r_1 $(=1)$, r_2, $r_3 \ldots\ldots r_e$, so wird jeder Bruch $\frac{r_k}{n}$ offenbar dieselben Reste, also auch in der Periode dieselben Ziffern (nur mit einer anderen beginnend) ergeben.

Jeder Bruch $\frac{s}{n}$ (wo $s < p-1$ und keine der Zahlen r ist) wird, da nach dem in § 3 Gesagten seine Periode gleichfalls $e$ziffrig sein muss, e andere Reste s_1, s_2, $s_3 \ldots . s_e$ ergeben, wo kein s gleich einem r sein kann. Jeder Bruch $\frac{t}{n}$ (wo $t < p-1$ und weder eine der Zahlen r noch eine der Zahlen s ist) wird wieder e andere Reste t_1, t_2, $t_3 \ldots . t_e$ ergeben, von denen keiner weder mit einem r noch mit einem s übereinstimmt.

Nun ist die Reihe aller Zahlen r, s, $t \ldots$ identisch mit der Reihe der Zahlen $1, 2, 3 \ldots . p-1$, es ist also

$$\sum_{k=1}^{k=e} r_k + \sum_{k=1}^{k=e} s_k + \sum_{k=1}^{k=e} t_k + \ldots = p-1$$

(wo $\sum_{k=1}^{k=e} r_k$ die Summe aller Reste r vom 1sten bis zum $e$ten bedeutet).

Da aber andererseits $\sum_{k=1}^{k=e} r_k = \sum_{k=1}^{k=e} s_k = \sum_{k=1}^{k=e} t_k = \ldots\ldots = e$ ist, so mufs e ein durch Division mit einer ganzen Zahl entstandener Teil von $p-1$, also $e = \frac{p-1}{d}$ sein, was zu beweisen war. Es gilt also folgender Satz:

III. Die Gröfse der Periode aller Brüche $\frac{1}{p}$ $\left(\text{also auch } \frac{m}{p}\right)$, deren Nenner eine Primzahl ist, ist $= p-1$ oder ein Teil davon, $\frac{p-1}{d}$.

Anmerkung 1. Da der Annahme nach, wenn man von $\frac{1}{n}$ oder $\frac{10^0}{n}$ ausgeht, nach je e Divisionen sich der Rest 1 wiederholt, so mufs auch nach $p-1 = d \cdot e$ Divisionen der Rest 1 wiederkehren, es mufs also $10^{p-1} - 1$ durch p ohne Rest teilbar sein. Das ist, zunächst für die Zahl 10, der berühmte, ungemein wichtige und fruchtbare **Fermat'sche Lehrsatz.** Der obige Beweis ändert sich nicht, wenn man, statt die Reihe der Potenzen 10^0, 10^1, 10^2, $10^3 \ldots . 10^{p-1}$ durch p zu dividieren, die Reihe der Potenzen a^0, a^1, a^2, $a^3 \ldots . a^{p-1}$ durch p dividiert (wo a irgend eine durch p nicht teilbare Zahl ist). Der Fermat'sche Lehrsatz lautet also allgemeiner:

„Ist p eine Primzahl und a irgend eine durch p nicht teilbare Zahl, so ist stets $a^{p-1} - 1$ durch p ohne Rest teilbar."

Anmerkung 2. In der Zahlentheorie heifsen zwei oder mehr Zahlen a, b, $c \ldots .$, die bei der Division durch eine bestimmte Zahl (den „Modulus") gleiche Reste geben, gleichrestig oder „congruent" in Bezug auf diesen „Modulus". Das Zeichen der Congruenz ist $\equiv$, man schreibt $a \equiv b$ (modulo k) oder $a \equiv b$ (mod. k).

So ist z. B. $17 \equiv 24 \,(\text{mod. } 7)$, $17 \equiv 39 \,(\text{mod. } 11)$, $1 \equiv 14 \equiv 40 \equiv 66 \equiv 131 \,(\text{mod. } 13)$. Hiernach wird der Fermat'sche Lehrsatz gewöhnlich in der Form geschrieben

$$a^{p-1} \equiv 1 \,(\text{mod.} \, p).$$

Anmerkung 3. Der Anhang giebt für die Primzahlen p unter 100000 die Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{p}$ $\left(\text{oder } \frac{m}{p}\right)$ in der Weise an, dafs immer nur der Divisor d beigefügt ist, mit welchem man $p - 1$ zu dividieren hat, um die Anzahl der Ziffern in der Periode zu erhalten. Aufgestellt ist diese Tabelle von Herrn Dr. Friedrich Kefsler.*)

§ 5. Die Gröfse der Periode der Brüche $\frac{1}{p^\alpha}$, deren Nenner eine Primzahlpotenz ist.

Ist der Nenner des zu verwandelnden Bruches die Potenz einer Primzahl, so ist leicht einzusehen, dafs hier die Anzahl der möglichen Reste und somit die der Ziffern in der Periode $< p^\alpha - 1$ sein mufs. Denn unter den Zahlen $1, 2, 3 \ldots p^\alpha - 1$ sind als Reste diejenigen unmöglich, welche durch p teilbar sind, also $p, 2p, 3p \ldots\ldots$ Bezeichnet man nämlich die Periodenziffern der Reihe nach mit $n_1, n_2, n_3 \ldots\ldots$ und die Reste der Reihe nach mit $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots$, so ergeben sich bei Ausführung der Division $1{,}000 \ldots : p^\alpha$ der Reihe nach die Gleichungen

$$10 \quad = n_1 \cdot p^\alpha + r_1$$
$$10 \cdot r_1 = n_2 \cdot p^\alpha + r_2$$
$$10 \cdot r_2 = n_3 \cdot p^\alpha + r_2 \quad \text{u. s. f.}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dafs r_1 nicht durch p teilbar sein kann; denn sonst wäre ja die ganze rechte Seite durch p teilbar, also auch die linke, was unmöglich ist. Genau ebenso folgt aus der zweiten Gleichung, dafs r_2 nicht durch p teilbar sein kann u. s. f.

Aus der Zahlenreihe $1, 2, 3 \ldots\ldots p^\alpha - 1$ sind also diejenigen als Reste ausgeschlossen, die durch p teilbar sind. Mit anderen Worten: es sind nur diejenigen als Reste möglich, die kleiner als p^α und relativ prim dazu sind — man pflegt ihre Anzahl in der Zahlentheorie mit $\varphi(p^\alpha)$ zu bezeichnen.

Nun ist $\varphi(p^\alpha) = (p - 1) p^{\alpha - 1}$.

Denn die Anzahl derjenigen Zahlen $p, 2p, 3p \ldots\ldots p^{\alpha-1} \cdot p$, welche nicht gröfser als p^α und durch p teilbar sind, ist $p^{\alpha-1}$.

Es bleiben also von sämtlichen Zahlen $1, 2, 3 \ldots\ldots p^\alpha$ als solche Zahlen, die gegen p relativ prim sind, übrig $p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1} \cdot p - p^{\alpha-1} = (p - 1) p^{\alpha-1}$, w. z. b. w.

Genau ebenso wie in § 4 läfst sich nun zeigen, dafs die Gröfse der Periode (e) des Bruches $\frac{1}{p^\alpha}$ entweder $\varphi(p^\alpha)$ oder ein Teil davon, etwa $\frac{\varphi(p^\alpha)}{d}$ sein mufs.

Denn sei wieder die Reihe der e Reste, welche sich bei Verwandlung des Bruches $\frac{1}{p^\alpha}$ ergeben, $r_1 \,(= 1), r_2, r_3 \ldots\ldots r_e$, so giebt jeder Bruch $\frac{r_k}{p^\alpha}$ dieselben Reste, jeder andere Bruch $\frac{s}{n}$ (wo s keine der Zahlen r ist) e andere Reste $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_e$, wo kein s gleich einem r sein kann, u. s. f.

---

*) Die Zahlen im ersten Hundert, für welche die Gröfse der Periode $e = p - 1$ ist, sind 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97.

Da nun die Reihe aller Zahlen r, s, t identisch ist mit der Reihe aller Zahlen, die $< p^\alpha$ und relativ prim dazu sind, da also

$$\sum_{k=1}^{k=e} r_k + \sum_{k=1}^{k=e} s_k + \sum_{k=1}^{k=e} t_k + \ldots\ldots = \varphi(p^\alpha) \text{ ist}$$

und da andererseits $\sum_{k=1}^{k=e} r_k = \sum_{k=1}^{k=e} s_k = \sum_{k=1}^{k=e} t_k = \ldots\ldots = e$ ist,

so mufs $e = \frac{\varphi(p^\alpha)}{d}$ sein (wenn es nicht $= \varphi(p^\alpha)$ ist).

Es gilt also der Satz:

IV. Die Gröfse der Periode aller Brüche $\frac{1}{p^\alpha}$ $\left(\text{also auch } \frac{m}{p^\alpha}\right)$, deren Nenner eine Primzahlpotenz ist, ist $= (p-1)p^{\alpha-1}$ oder ein Teil davon, $\frac{(p-1)\,p^{\alpha-1}}{d}$.

Anmerkung. Von den Primzahlpotenzen unter 100 erreicht nur 49 die höchstmögliche Gröfse der Periode $42 = 6 \cdot 7^1$. Dagegen hat 9 nur eine, 27 nur 3 und 81 nur 9 Ziffern in der Periode (vgl. § 7).

§ 6. Die Gröfse der Periode der Brüche $\frac{1}{p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \ldots}$, deren Nenner eine zusammengesetzte Zahl ist.

Dieselbe Betrachtung wie in § 5 lehrt, dafs nur solche Zahlen als Reste möglich sind, die kleiner als $p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \ldots\ldots$ und relativ prim gegen diese Zahl sind, also in der üblichen Bezeichnung der Zahlentheorie $\varphi(p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \ldots\ldots)$ Zahlen.

Ferner lehrt die im vorigen Paragraphen weiter angestellte Betrachtung, dafs die Gröfse der Periode gleich dieser Zahl φ oder gleich einem Teil davon, $\frac{\varphi}{d}$ sein mufs.

Es kommt also nur noch darauf an, für die Zahl $\varphi(p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \ldots\ldots)$ einen Ausdruck zu finden. Sei zur Abkürzung $P = p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \ldots$ gesetzt, so mufs man, um $\varphi(P)$ zu finden, zunächst aus der Reihe der Zahlen $1, 2, 3 \ldots\ldots P$ die durch p teilbaren Zahlen $p, 2p, 3p \ldots\ldots \frac{P}{p} \cdot p$ fortnehmen. Die Anzahl dieser Zahlen ist $\frac{P}{p}$, also die der übrigbleibenden $P - \frac{P}{p}$ oder $P\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.

Von diesen Zahlen, die p nicht enthalten, müssen die fortgenommen werden, welche den Faktor p_1 enthalten.

Die Zahlen, welche den Faktor p_1 enthalten, sind $p_1, 2p_1, 3p_1 \ldots\ldots \frac{P}{p_1} \cdot p_1$. Diejenigen davon, die den Faktor p enthalten, sind schon weggelassen, es sind also noch die den Faktor p nicht enthaltenden $\frac{P}{p_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ Zahlen wegzulassen. Folglich ist die Anzahl derer, die p und p_1 nicht enthalten,

$$= P\left(1 - \frac{1}{p}\right) - \frac{P}{p_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$= P\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p_1}\right).$$

Die Zahlen, welche den Faktor p_2 enthalten, sind p_2, $2p_2$, $3p_2 \ldots \frac{P}{p_2} \cdot p_2$. Diejenigen davon, die p und p_1 enthalten, sind schon weggelassen, es sind also noch die diese Faktoren nicht enthaltenden $\frac{P}{p_2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)$ Zahlen fortzulassen. Folglich ist die Anzahl der Zahlen, die auch durch p_2 nicht teilbar sind

$$= P\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right) - \frac{P}{p_2}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right) = P\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right).$$

So läfst sich nun allgemein zeigen, dafs für ein Produkt

$$P = p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \cdot p_3^\delta \cdot \ldots\ldots$$

die Anzahl φ aller Zahlen, die kleiner als P und relativ prim gegen diese Zahl sind,

$$= P\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\left(1-\frac{1}{p_3}\right)\ldots\ldots \text{ ist.}$$

Setzt man für P seinen Wert ein, so ergiebt sich

$$\varphi(P) = p^\alpha\left(1-\frac{1}{p}\right) p_1^\beta\left(1-\frac{1}{p_1}\right) p_2^\gamma\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\ldots$$

oder $$\varphi(p^\alpha p_1^\beta p_2^\gamma \ldots\ldots) = p^{\alpha-1}(p-1)\, p_1^{\beta-1}(p_1-1)\, p_2^{\gamma-1}(p_2-1) \;\ldots\ldots$$

Es gilt also der folgende Satz:

V. Die Gröfse der Periode aller Brüche $\frac{1}{p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \ldots}$ $\left(\text{also auch } \frac{m}{p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \ldots}\right)$, deren Nenner eine zusammengesetzte Zahl ist, ist $= (p-1)p^{\alpha-1}(p_1-1)p_1^{\beta-1}(p_2-1)p_2^{\gamma-1}\ldots\ldots$ oder ein Teil davon, $\frac{(p-1)p^{\alpha-1}(p_1-1)p_1^{\beta-1}\ldots\ldots}{d}$.

Anmerkung. Da die Betrachtung in § 4, Anmerkung, auch für diesen Fall gültig bleibt, so gilt zunächst für die Zahl 10, aber auch für jede andere Zahl a, der sogenannte **verallgemeinerte Fermat'sche Lehrsatz:**

„Sind p, p_1, $p_2 \ldots\ldots$ Primzahlen und ist a eine durch keine derselben teilbare Zahl, so ist stets $a^{(p-1)p^{\alpha-1}\cdot(p_1-1)p_1^{\beta-1}\cdot(p_2-1)p_2^{\gamma-1}\ldots\ldots} - 1$ durch $p^\alpha p_1^\beta p_2^\gamma$ ohne Rest teilbar (wo α, β, $\gamma \ldots$ irgend welche natürlichen Zahlen bedeuten)."

Oder in anderer Form (vgl. § 4, Anmerk. 2)

$$a^{(p-1)p^{\alpha-1}\cdot(p_1-1)p_1^{\beta-1}\cdot(p_2-1)p_2^{\gamma-1}\ldots} \equiv 1 \;(\text{mod.}\; p^\alpha \cdot p_1^\beta \cdot p_2^\gamma \ldots).$$

§ 7. Abhängigkeit der Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{p^\alpha}$ von der Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{p}$.

Bei den Beweisen dieses Paragraphen werden einige Sätze über Congruenzen (s. § 4, Anmerk. 2) benutzt werden, die kurz besagen, dafs man mit Congruenzen vielfach rechnen darf, wie mit Gleichungen.

Da hier zahlentheoretische Kenntnisse nicht vorausgesetzt werden, so sollen diese Sätze zunächst ausgesprochen und bewiesen werden.

1. „Sind in Bezug auf denselben Modulus zwei Zahlen einer dritten congruent, so sind sie auch einander congruent."

$$\begin{array}{ll} \text{Ist} & a \equiv c \pmod{k} \\ \text{und} & b \equiv c \pmod{k}, \\ \hline \text{so ist auch} & a \equiv b \pmod{k}. \end{array}$$

Beweis. Da a und c bei der Division durch k denselben Rest geben, und b und c gleichfalls denselben Rest geben, müssen auch a und b denselben Rest geben.

2. „Congruenzen können addiert oder subtrahiert werden.“

$$\begin{array}{ll} \text{Ist} & a \equiv b \pmod{k} \\ \text{und} & c \equiv d \pmod{k}, \\ \hline \text{so ist auch} & a \pm c \equiv b \pm d \pmod{k}. \end{array}$$

Beweis. Bedeuten n und n_1 irgend welche ganze Zahlen, so ist nach Voraussetzung

$$\begin{array}{ll} & a = b + nk \\ \text{und} & c = d + n_1 k, \\ \hline \text{also} & a \pm c = b \pm d + (n \pm n_1)k, \\ \text{d. h.} & a \pm c \equiv b \pm d \pmod{k}. \end{array}$$

Der Satz gilt offenbar für beliebig viele Congruenzen für denselben Modulus: Man kann sie addieren und subtrahieren wie Gleichungen.

3. „Congruenzen können mit einander multipliziert werden.“

$$\begin{array}{ll} \text{Ist} & a \equiv b \pmod{k} \\ \text{und} & c \equiv d \pmod{k}, \\ \hline \text{so ist auch} & a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{k}. \end{array}$$

Beweis. Da nach Voraussetzung

$$\begin{array}{ll} & a = b + nk \\ \text{und} & c = d + n_1 k \text{ ist,} \\ \hline \text{so ist} & a \cdot c = b \cdot d + k(dn + bn_1 + nn_1 k), \\ \text{d. h.} & a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{k}. \end{array}$$

Auch dieser Satz kann offenbar dahin verallgemeinert werden, daſs man beliebig viele Congruenzen für denselben Modulus mit einander multiplizieren darf wie Gleichungen.

4. „Gleich hohe Potenzen congruenter Zahlen sind in Bezug auf denselben Modulus einander congruent.“

$$\begin{array}{ll} \text{Ist} & a \equiv b \pmod{k}, \\ \text{so ist auch} & a^e \equiv b^e \pmod{k}. \end{array}$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$a = b + nk,$$

also

$$a^e = b^e + \frac{e}{1} b^{e-1} nk + \frac{e(e-1)}{1 \cdot 2} b^{e-2} n^2 k^2 + \ldots + n^e k^e \text{ (binomischer Lehrsatz).}$$

Läſst man nun die Vielfachen von k fort, so ist

$$a^e \equiv b^e \pmod{k}.$$

(Bei der Division und Radizierung von Congruenzen ist die Analogie mit den Gleichungen nicht mehr vollständig; indessen braucht hier nicht darauf eingegangen zu werden.)

VI. Giebt $\frac{1}{p}$ einen periodischen Dezimalbruch von e Stellen, so giebt in der Regel $\frac{1}{p^2}$ eine Periode von $e \cdot p$ Stellen, $\frac{1}{p^3}$ eine solche von $e \cdot p^2$ Stellen......, $\frac{1}{p^\alpha}$ eine solche von $e \cdot p^{\alpha-1}$ Stellen.

In den Ausnahmefällen, wo die Periode des Bruches $\frac{1}{p}$ durch p teilbar ist, hat auch $\frac{1}{p^2}$ eine $e$ziffrige Periode.

Beweis. Sei C die Periode von $\frac{1}{p}$, D die von $\frac{1}{p^2}$, so ist also

$$\frac{1}{p} = \frac{C}{10^e - 1}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{D}{10^{ex} - 1}.$$

Durch Division beider Gleichungen erhält man

$$p = \frac{C}{D} \cdot \frac{10^{ex} - 1}{10^e - 1} = \frac{C}{D}(10^{(x-1)e} + 10^{(x-2)e} + \ldots . + 10^e + 1).$$

Enthält nun C den Faktor p nicht, so mufs $10^{(x-1)e} + \ldots + 10^e + 1$ diesen Faktor enthalten, es mufs also

$$10^{(x-1)e} + 10^{(x-2)e} e \ldots . + 10^e + 1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ sein.}$$

Nun ist $1 \equiv 1 \pmod{p}$,

ferner nach Voraussetzung $10^e \equiv 1 \pmod{p}$,

also auch $10^{2e} \equiv 1 \pmod{p}$ (4. Satz)

....

$10^{(x-1)e} \equiv 1 \pmod{p}$. Durch Addition dieser x Gleichungen (2. Satz)

ergiebt sich $1 + 10^e + \ldots . 10^{(x-1)e} \equiv x \pmod{p}$.

Da nun diese Summe auch $\equiv 0 \pmod{p}$ war, so mufs

$$x \equiv 0 \pmod{p} \text{ sein.}$$

Da aber x nicht $= 0$ sein kann und nicht $> p$ zu sein braucht, so ist $x = p$, also

$$\frac{1}{p^2} = \frac{D}{10^{ep} - 1},$$

d. h. $\frac{1}{p^2}$ giebt einen periodischen Dezimalbruch von ep Stellen.

1. Beispiel. $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}09 \ldots\ldots$ (2 Stellen)

$\frac{1}{11^2} = 0,\overline{0082644628099173553719} \ldots\ldots$ (22 Stellen).

2. Beispiel. $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857} \ldots\ldots$ (6 Stellen)

$\frac{1}{7^2} = \frac{1}{49} = 0,\overline{020408163265306122448979591836734693877551} \ldots$ (42 Stellen)

Sei also wieder $\frac{1}{p^2} = \frac{D}{10^{ep} - 1}$

und weiter $\frac{1}{p^3} = \frac{E}{10^{epy} - 1}$, so ergiebt sich durch Division

$$p = \frac{D}{E}(10^{ep(y-1)} + 10^{ep(y-2)} \ldots\ldots + 10^{ep} + 1.)$$

Enthält D den Faktor p nicht, so mufs

$$10^{ep(y-1)} + 10^{ep(y-2)} \ldots\ldots + 10^{ep} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ sein.}$$

Durch dieselben Schlüsse wie vorhin ergiebt sich dann, daſs $y = p$ ist, also $\frac{1}{p^3} = \frac{E}{10^{ep^2} - 1}$, daſs also $\frac{1}{p^3}$ eine Periode von $e \cdot p^2$ Stellen hat u. s. f.

Den ersten Ausnahmefall giebt $p = 3$, denn hier ist

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}\,33\ \ldots \text{ (1 Stelle)},$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{9} = 0,\overline{1}\,11\ \ldots \text{ (1 Stelle)}.$$

Hier läſst sich nun wieder zeigen, daſs die Periode von $\frac{1}{3^n}$ immer 3^{n-2} Stellen hat. Der Beweis kann ebenso wie der vorige Beweis geführt werden. Er soll hier nicht ausgeführt werden; die Perioden von $\frac{1}{3^n}$ für $n = 3, 4, 5$ sind:

$$\frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0,\overline{037}\,037\ \ldots \text{ (3 Stellen)},$$

$$\frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} = 0,\overline{012345679}\ \ldots \text{ } (3^2 = 9 \text{ Stellen}),$$

$$\frac{1}{3^5} = \frac{1}{243} = 0,\overline{004115226337448559670781893}\ \ldots \text{ } (3^3 = 27 \text{ Stellen}).$$

Einen zweiten Ausnahmefall giebt die Primzahl 487. Die Periode von $\frac{1}{487}$ ist (wie Desmarest bemerkt hat) durch 487 teilbar, daher hat die Periode von $\frac{1}{487^2}$ eben so viel Stellen wie die von $\frac{1}{487}$, nämlich 486. Andere Ausnahmefälle sind mir nicht bekannt, doch mag es noch welche geben.

§ 8 Abhängigkeit der Gröſse der Periode des Bruches $\frac{1}{n \cdot n_1 \cdot n_2 \ldots\ldots}$ (wo $n, n_1, n_2 \ldots$ relativ prim sind) von den Gröſsen der Perioden der Brüche $\frac{1}{n}, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \ldots\ldots$

Lehrsatz VII. Sind $e = c \cdot d$, $e_1 = c \cdot d_1$, $e_2 = c \cdot d_2 \ldots\ldots$ die Gröſsen der Perioden der Brüche $\frac{1}{n}, \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \ldots\ldots$ (wo c auch $= 1$ sein kann), so ist die Gröſse der Periode des Bruches $\frac{1}{n \cdot n_1 \cdot n_2 \ldots}$ das kleinste gemeinschaftliche Vielfache E der Zahlen $e, e_1, e_2 \ldots\ldots$ ($E = c \cdot d \cdot d_1 \cdot d_2 \ldots\ldots$, wenn c der gemeinsame Faktor von $e, e_1, e_2 \ldots$ ist).

1. Beweis $\left(\text{für zwei Brüche } \frac{1}{n} \text{ und } \frac{1}{n_1}\right)$.

Es ist $\frac{1}{n \cdot n_1} = \frac{1}{n} : n_1$.

Soll nun bei der Division von 1 durch n eine cdziffrige Periode erhalten werden, so mufs (nach § 3) $0,\underbrace{999\ldots\ldots}_{c\cdot d\text{ Neunen}}$ durch n teilbar sein Das Resultat dieser Division hat die Form $\underbrace{0,\ldots\ldots..}_{c\cdot d\text{ Ziffern}}$ Durch diese Division ist aus jeder der aus $c\cdot d$ Neunen, also auch aus jeder aus $c\cdot d\cdot d_1 = E$ Neunen gebildeten Zahl $\underbrace{999\ldots..}_{E\text{ Neunen}}$ der Faktor n entfernt. Dagegen enthält dieser Quotient noch den Faktor n_1, also ist der Teil dieses Quotienten $0,\overbrace{\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{c\cdot d\text{ Ziffern}}}^{E\text{ Ziffern}}$ (d_1 Gruppen zu $c\cdot d$ Ziffern) durch n_1 ohne Rest teilbar, man erhält also bei Division dieses Quotienten durch n_1 eine $c\cdot d\cdot d_1 = E$ziffrige Periode.

Beispiel: $\frac{1}{707} = \frac{1}{101} : 7 = 0,\underbrace{0099}_{4\text{ Ziffern}}00990099\ldots.. : 7 = 0,\underbrace{001414427157}_{12\text{ Ziffern}}0014..$

$$\left(\frac{108}{707} = 0,\overline{152758132956}\ldots..\right)$$

2. Beweis $\left(\text{für zwei Brüche } \frac{1}{n} \text{ und } \frac{1}{n_1}\right)$.

Es ist $\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} = \frac{n_1 + n}{nn_1}$. Mithin kann der Bruch $\frac{n + n_1}{nn_1}$ durch Addition in folgender Weise gebildet werden:

$$\frac{1}{n} = 0,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{c\cdot d\text{ Ziffern}}$$

$$\frac{1}{n_1} = 0,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{c\cdot d_1\text{ Ziffern}}$$

$$\overline{\frac{n + n_1}{nn_1} = 0,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{E = cdd_1\text{ Ziffern}}}$$

Also hat der Bruch $\frac{n + n_1}{nn_1}$, also auch der Bruch $\frac{1}{nn_1}$ oder jeder Bruch $\frac{m}{nn_1}$ (vgl. § 3) eine Eziffrige Periode, wo E das kleinste gemeinschaftliche Vielfache von $c\cdot d$ und $c\cdot d_2$ bedeutet.

Beispiel:

$$\frac{1}{101} = 0,009900990099\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{7} = 0,142857142857\ldots\ldots$$

$$\overline{\frac{108}{707} = 0,\overline{152758132956}\ldots.}$$

$$\left(\frac{1}{107} = 0,\overline{001414427157}\ldots..\right)$$

Mit Benutzung des obigen Lehrsatzes ergiebt sich aus der in § 4 aufgestellten Tabelle unter Hinzunahme der zusammengesetzten Faktoren der Zahlen von der Form $10^n - 1$:

Die Periode des Bruches $\frac{1}{n}$ $\left(\text{und also auch jedes Bruches } \frac{m}{n}\right)$ ist

1 ziffrig für $n = 3, 9$
2 - - $n = 11, 33, 99$
3 - - $n = 27, 37, 111, 333, 999$
4 - - $n = 101, 303, 909, 1111, 3333, 9999$
5 - - $n = 41, 123, 271, 369, 813, 2439, 11111, 33333, 99999$
6 - - $n = 7, 13, 21, 39, 63, 77, 91, 117, 143, 189, 231, 259, 273, 297, 351, 407, 429, 481, 693, 777, 819, 1001, 1221, 1287, 1443, 2079, 2331, 2457, 2849, 3003, 3367, 3663, 3861, 4329, 5291, 6993, 8547, 9009, 10101, 10989, 12987, 15873, 25641, 27027, 30303, 37037, 47619, 76923, 90909, 111111, 142857, 333333, 999999$
7 - - $n = 239, 717, 2151, 4649, 13947, 41841, 1111111, 3333333, 9999999$
8 - - $n = 73, 137, 219, 411, 657, 803, 1233, 1507, 2409, 4521, 7227, 7373, 10001, 13563, 13837, 22119, 30003, 41511, 66257, 81103, 90009, 110011, 124533, 152207, 243309, 330033, 456621, 729927, 990099, 1010101, 1369863, 3030303, 9090909, 11111111, 33333333, 99999999$
9 - - $n = 81, 2997, 333667, 1001001, 3003003, 9009009, 12345679, 27027027, 37037037, 111111111, 333333333, 999999999$

u. s. w.

§ 9. Die cyklische Folge der Ziffern in der Periode.

Die cyklische Folge der Ziffern in der Periode der Brüche $\frac{1}{n}, \frac{2}{n} \ldots \frac{n-1}{n}$ zeigen zunächst die folgenden Zahlenbeispiele:

1. $\frac{1}{7} = 0{,}142857\ldots$
$\frac{3}{7} = 0{,}428571\ldots$
$\frac{2}{7} = 0{,}285714\ldots$
$\frac{6}{7} = 0{,}857142\ldots$
$\frac{4}{7} = 0{,}571428\ldots$
$\frac{5}{7} = 0{,}714285\ldots$

2. $\frac{1}{13} = 0{,}076923\ldots$ $\quad \frac{2}{13} = 0{,}153846\ldots$
$\frac{10}{13} = 0{,}769230\ldots$ $\quad \frac{7}{13} = 0{,}538461\ldots$
$\frac{9}{13} = 0{,}692307\ldots$ $\quad \frac{5}{13} = 0{,}384615\ldots$
$\frac{12}{13} = 0{,}923076\ldots$ $\quad \frac{11}{13} = 0{,}846153\ldots$
$\frac{3}{13} = 0{,}230769\ldots$ $\quad \frac{6}{13} = 0{,}461538\ldots$
$\frac{4}{13} = 0{,}307692\ldots$ $\quad \frac{8}{13} = 0{,}615384\ldots$

3. $\frac{1}{27} = 0{,}037\ldots$ $\quad \frac{2}{27} = 0{,}074\ldots$ $\quad \frac{4}{27} = 0{,}148\ldots$ $\quad \frac{5}{27} = 0{,}185\ldots$ $\quad \frac{7}{27} = 0{,}259\ldots$ $\quad \frac{8}{27} = 0{,}296\ldots$
$\frac{10}{27} = 0{,}370\ldots$ $\quad \frac{20}{27} = 0{,}740\ldots$ $\quad \frac{13}{27} = 0{,}481\ldots$ $\quad \frac{23}{27} = 0{,}851\ldots$ $\quad \frac{16}{27} = 0{,}592\ldots$ $\quad \frac{26}{27} = 0{,}962\ldots$
$\frac{19}{27} = 0{,}703\ldots$ $\quad \frac{11}{27} = 0{,}407\ldots$ $\quad \frac{22}{27} = 0{,}814\ldots$ $\quad \frac{14}{27} = 0{,}518\ldots$ $\quad \frac{25}{27} = 0{,}925\ldots$ $\quad \frac{17}{27} = 0{,}629\ldots$

4. $\frac{1}{41} = 0{,}02439\ldots$ $\frac{2}{41} = 0{,}04878\ldots$ $\frac{3}{41} = 0{,}07317\ldots$ $\frac{4}{41} = 0{,}09756\ldots$

$\frac{10}{41} = 0{,}24390\ldots$ $\frac{20}{41} = 0{,}48780\ldots$ $\frac{30}{41} = 0{,}73170\ldots$ $\frac{40}{41} = 0{,}97560\ldots$

$\frac{18}{41} = 0{,}43902\ldots$ $\frac{36}{41} = 0{,}87804\ldots$ $\frac{13}{41} = 0{,}31707\ldots$ $\frac{31}{41} = 0{,}75609\ldots$

$\frac{16}{41} = 0{,}39024\ldots$ $\frac{32}{41} = 0{,}78048\ldots$ $\frac{7}{41} = 0{,}17073\ldots$ $\frac{23}{41} = 0{,}56097\ldots$

$\frac{37}{41} = 0{,}90243\ldots$ $\frac{33}{41} = 0{,}80487\ldots$ $\frac{29}{41} = 0{,}70731\ldots$ $\frac{25}{41} = 0{,}60975\ldots$

$\frac{5}{41} = 0{,}12195\ldots$ $\frac{6}{41} = 0{,}14634\ldots$ $\frac{11}{41} = 0{,}26829\ldots$ $\frac{15}{41} = 0{,}36585\ldots$

$\frac{9}{41} = 0{,}21951\ldots$ $\frac{19}{41} = 0{,}46341\ldots$ $\frac{28}{41} = 0{,}68292\ldots$ $\frac{27}{41} = 0{,}65853\ldots$

$\frac{8}{41} = 0{,}19512\ldots$ $\frac{26}{41} = 0{,}63414\ldots$ $\frac{34}{41} = 0{,}82926\ldots$ $\frac{24}{41} = 0{,}58536\ldots$

$\frac{39}{41} = 0{,}95121\ldots$ $\frac{14}{41} = 0{,}34146\ldots$ $\frac{12}{41} = 0{,}29268\ldots$ $\frac{35}{41} = 0{,}85365\ldots$

$\frac{21}{41} = 0{,}51219\ldots$ $\frac{17}{41} = 0{,}41463\ldots$ $\frac{38}{41} = 0{,}92682\ldots$ $\frac{22}{41} = 0{,}53658\ldots$

Betrachten wir zunächst den durch das erste Beispiel vertretenen Fall, dafs die Gröfse der Periode (e) ihren höchsten möglichen Wert hat ($g = p - 1$ für Primzahlen, $g = (p-1)$ $p^{\alpha-1}(p_1 - 1)p_1^{\beta-1}\ldots$ für zusammengesetzte Zahlen — vgl. §§ 4—6), so ist die cyklische Wiederholung derselben Zifferreihe innerhalb eines einzigen Kreises sofort verständlich. Denn bezeichnen r_1 ($= 1$), r_2, $r_3 \ldots . r_g$ die bei Ausführung der Division $1{,}000\ldots : n$ auftretenden Reste, so sind dieselben ja die g Zahlen $1, 2, 3 \ldots n-1$, welche kleiner als n und relativ prim dazu sind, nur in anderer Reihenfolge. Verwandelt man daher irgend einen der Brüche $\frac{r_k}{n}$ durch Ausführung der Division $r_k{,}000\ldots . : n$ in einen periodischen Dezimalbruch, so erhält man dieselbe Reihe von Resten r_k, $r_{k+1} \ldots . r_g$, 1, r_2, r_{k-1}, also auch in der Periode dieselbe Ziffernreihe, nur mit einer anderen beginnend. Es leuchtet also der folgende Satz ein:

VIII. Hat die Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{n}$ ihren höchsten möglichen Wert g (für Primzahlen $p-1$, für zusammengesetzte Zahlen $(p-1)p^{\alpha-1}(p_1-1)p_1^{\beta-1}\ldots$), so sind die Perioden aller Brüche $\frac{m}{n}$ cyklische Wiederholungen derselben Ziffernreihe.

Es ist nun ferner der durch das 2te, 3te und 4te Beispiel vertretene Fall zu betrachten, dafs die Gröfse der Periode e nicht $= g$, sondern ein Teil davon, $\frac{g}{d}$ ist.

Hier tritt offenbar bei Ausführung der Division $1{,}000\ldots : n$ von den g Zahlen 1, 2, $3 \ldots . n-1$, welche kleiner als n und relativ prim dazu sind, nur der $d$te Teil als Reste auf (da ja nach $e = \frac{g}{d}$ Divisionen 1 als Rest wiederkehrt). Nennt man diese Reste der Reihe nach

$r_1 (= 1), r_2, r_3 \ldots . r_e$, so ist klar, daſs jeder der Brüche $\frac{r_k}{n}$ bei Ausführung der Division $r_k,000 \ldots : n$ in der Periode eine cyklische Wiederholung derselben Ziffernreihe zeigen wird.

Verwandelt man dagegen einen Bruch $\frac{s_1}{n}$ (wo s_1 keine der Zahlen 1, $r_2 \ldots . r_e$ ist), so wird die Restreihe $s_1, s_2, s_3 \ldots . s_e$ auftreten; es ist aber leicht zu zeigen, daſs kein Glied s_l dieser Reihe irgend einem Gliede r_k der vorigen Restreihe gleich werden kann. Denn geschähe das, so würden beim weiteren Dividieren dieses Restes s_l durch n auch die Reste $r_{k+1}, r_{k+2} \ldots 1$, $r_2 \ldots r_e$ auftreten müssen. Die Brüche $\frac{s_l}{n}$ und $\frac{r_k}{n}$ hätten also auch in ihren Perioden dieselbe Ziffernreihe, die e Brüche $\frac{r}{n}$ lieferten dieselben periodischen Dezimalbrüche wie die e Brüche $\frac{s}{n}$, was offenbar widersinnig ist, da ja dann das Glied s_1 der s-Reihe auch einem Gliede der r-Reihe gleich sein müſste.

Verwandelt man weiter einen Bruch $\frac{t_1}{n}$ durch Division in einen periodischen Dezimalbruch, wo t_1 eine Zahl ist, die weder in der r- noch in der s-Reihe vorkommt, und nennt man die hierbei auftretenden Reste $t_1, t_2, t_3 \ldots . t_e$, so kann auch kein Glied dieser Reihe irgend einem Gliede r oder s gleich sein u. s. f. Die g als Reste möglichen Zahlen zerfallen also in d Gruppen zu je e Gliedern. Hieraus ergiebt sich sofort der folgende Satz:

IX. Hat die Gröſse der Periode des Bruches $\frac{1}{n}$ nicht den höchsten möglichen Wert g ($g = p - 1$ für Primzahlen, $g = (p-1)p^{\alpha-1}(p_1 - 1)p_1^{\beta-1} \ldots .$ für zusammengesetzte Zahlen), sondern den Wert $\frac{g}{d}$, so bilden die Perioden aller Brüche $\frac{m}{n}$ d verschiedene Kreise sich cyklisch wiederholender Ziffern.*)

§ 10. Beziehung zwischen den Ziffern der ersten und zweiten Hälfte der Perioden, deren Gröſse eine gerade Zahl ist.

Sei C die $e$ziffrige Periode des Bruches $\frac{m}{p}$, also

$$\frac{m}{p} = 0,\underbrace{\overset{C}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}_{e \text{ Ziffern}},$$

so ergiebt sich durch Multiplikation mit 10^e

$$\frac{m}{p} \cdot 10^e = C,\underbrace{\overset{C}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}_{e \text{ Ziffern}}$$

und durch Subtraktion der oberen Gleichung von der unteren $(10^e - 1)\frac{m}{p} = C$

oder

$$\frac{m}{p} = \frac{C}{10^e - 1}.\text{**)}$$

*) In einer Tabelle der Perioden der Primzahlen und Primzahlpotenzen, wie sie Gauss für das erste Tausend aufgestellt hat (Werke, Band II. Seite 411—484), genügt daher nur für $e = g$ die Angabe nur einer Periode, während für $e = \frac{g-1}{d}$ immer d verschiedene Perioden anzugeben sind.

**) Hierauf beruht das in den Schulbüchern angegebene Verfahren, einen gegebenen reinperiodischen Dezimalbruch in einen gemeinen Bruch zurück zu verwandeln.

Ist nun die Gröfse der Periode eines Bruches $\frac{m}{p}$ eine gerade Zahl, also $e = 2n$, so ist

$$\frac{m}{p} = \frac{C}{10^{2n} - 1} = \frac{C}{(10^n - 1)(10^n + 1)}$$

oder

$$\frac{m(10^n - 1)(10^n + 1)}{p} = C.$$

Da nun nach der Voraussetzung $10^n - 1$ die kleinste Zahl von der Form $10^x - 1$ ist, welche durch p teilbar ist, so kann p kein Teiler von $10^n - 1$, mufs also ein Teiler von $10^n + 1$ sein. Bezeichnet man die erste Hälfte der Periode mit A, die zweite mit B, so ist

$$C = A \cdot 10^n + B,$$

also

$$\frac{m}{p} = \frac{A \cdot 10^n + B}{10^{2n} - 1} = \frac{A(10^n - 1) + A + B}{10^{2n} - 1}$$

oder

$$\frac{m(10^{2n} - 1)}{p} = A(10^n - 1) + A + B.$$

Durch Division dieser Gleichung mit $10^n - 1$ ergiebt sich

$$(1) \quad \frac{m(10^n + 1)}{p} = A + \frac{A + B}{10^n - 1}.$$

Da nun sowohl A als auch nach dem oben Gesagten $\frac{10^n + 1}{p}$ eine ganze Zahl ist, so mufs der Summand $\frac{A + B}{10^n - 1}$ ebenfalls eine ganze Zahl sein.

Da ferner A, B und $10^n - 1$ $n$ziffrige Zahlen sind, und $10^n - 1$ mit lauter Neunen geschrieben wird, was für A und B ausgeschlossen ist, so kann $\frac{A + B}{10^n - 1}$ nur die ganze Zahl 1 sein, oder es ist $A + B = 10^n - 1$. Es gilt also der Satz:

X. Ist die Gröfse eines Bruches $\frac{m}{p}$ eine gerade Zahl ($e = 2n$), so ist die Summe der ersten und zweiten Hälfte der Periode die aus n Neunen gebildete Zahl $10^n - 1$.

Beispiele: 1. $\frac{7}{13} = 0,\overline{538\,461}\ldots$ $\quad A = 538$, $B = 461$, $A + B = 999$

2. $\frac{17}{19} = 0,\overline{894736842\,105263157}\ldots$ $\quad A = 894736842$, $B = 105263157$, $A + B = 999999999$

Durch Einsetzen des Wertes 1 für $\frac{A + B}{10^n - 1}$ in die obige Gleichung (1) ergiebt sich ferner

$$\frac{m}{p} = \frac{A + 1}{10^n + 1},$$

also der Satz:

XI. Der Wert eines periodischen Dezimalbruchs mit $2n$ziffriger Periode kann, wenn die Summe der ersten und zweiten Hälfte der Periode $= 10^n - 1$ ist, aus der ersten Hälfte A der Periode durch die Gleichung ermittelt werden $\frac{m}{p} = \frac{A + 1}{10^n + 1}$.

Beispiele: 1. $0,\overline{538\,461}\ldots = \frac{539}{1001} = \frac{7\cdot 77}{13\cdot 77} = \frac{7}{13}$

2. $0,\overline{894736842\,105263157}\ldots = \frac{894736843}{100000001} = \frac{17}{19}.$

Ist die Grölse der Periode von $\frac{m}{p}$ eine gerade Zahl, $e = 2n$, und kommt man bei Ausführung der Division $\frac{r}{p}$ nach Berechnung von n Ziffern auf den Rest r_{n+1}, so läfst sich zeigen, dafs dieser Rest r_{n+1} stets $= p - r$ ist.

Nachdem man nämlich auf den Rest r_{n+1} gekommen ist, müssen die nun folgenden n Ziffern der Periode dieselben sein, wie die, welche man bei Verwandlung des Bruches $\frac{r_{n+1}}{p}$ für die erste Hälfte der Periode erhält. Es ist also, wenn wieder A die erste, B die zweite Hälfte der Periode bedeutet,

$$\frac{m}{p} = \frac{A\cdot 10^n + B}{10^{2n} - 1}$$

$$\frac{r_{n+1}}{p} = \frac{B\cdot 10^n + A}{10^{2n} - 1},$$

also durch Addition
$$\frac{m + r_{n+1}}{p} = \frac{(A+B)(10^n+1)}{10^{2n}-1}.$$

Da nun bewiesen ist, dafs $A + B = 10^n - 1$ ist,

so folgt
$$\frac{m + r_{n+1}}{p} = 1, \quad m + r_{n+1} = p$$

oder
$$r_{n+1} = p - m.$$

Es gilt also der weitere Satz:

XII. Ist die Gröfse der Periode eines Bruches $\frac{m}{p}$ eine gerade Zahl ($e = 2n$), so kommt man bei Ausführung der Division $m:p$ nach Berechnung von n Ziffern notwendig auf den Rest $p - m$ (das geschieht also stets, wenn $e = p - 1$ ist).

Einfacher läfst sich dieser Satz mit Benutzung von Congruenzen folgendermafsen beweisen:

Ist die Periode des Bruches $\frac{m}{p}$ $2n$ziffrig, so besteht die Congruenz

$10^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ oder auch $10^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ oder auch $(10^n + 1)(10^n - 1) \equiv 0 \pmod{p}$. Da nun $10^n - 1$ nicht $\equiv 0 \pmod{p}$ sein kann, denn nach der Voraussetzung ist ja nicht 10^n, sondern erst $10^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$, so mufs der andere Faktor des Produktes, $10^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ sein, also mufs $10^n \equiv -1 \pmod{p}$ sein.

Multipliziert man diese Congruenz mit der Congruenz $m \equiv m \pmod{p}$ (§ 7, Satz 3), so ergiebt sich

$$m\cdot 10^n \equiv -m \pmod{p} \equiv p - m \pmod{p},$$

d. h. man kommt beim Dividieren von m durch p nach Berechnung von n Ziffern notwendig auf den Rest $p - m$, w. z. b. war.

Beispiele (in der Schreibweise von § 4, Anmerk. 2):

1. $\frac{7}{13}$

$7 \cdot 10^0 \equiv 7 \pmod{13}$

$7 \cdot 10^1 \equiv 5 \pmod{13}$

$7 \cdot 10^2 \equiv 11 \pmod{13}$

$7 \cdot 10^3 \equiv 6 \equiv \underline{13 - 7} \pmod{13}$.

2. $\frac{17}{19}$

$17 \cdot 10^0 \equiv 17 \pmod{19}$	$17 \cdot 10^3 \equiv 14 \pmod{19}$	$17 \cdot 10^6 \equiv 16 \pmod{19}$
$17 \cdot 10^1 \equiv 18 \pmod{19}$	$17 \cdot 10^4 \equiv 7 \pmod{19}$	$17 \cdot 10^7 \equiv 8 \pmod{19}$
$17 \cdot 10^2 \equiv 9 \pmod{19}$	$17 \cdot 10^5 \equiv 13 \pmod{19}$	$17 \cdot 10^8 \equiv 4 \pmod{19}$
		$17 \cdot 10^9 \equiv 2 \equiv \underline{19 - 17} \pmod{19}$.

Kommt man also bei Berechnung der Periode eines Bruches $\frac{m}{p}$, deren Gröſse $e = 2n$ man kennt, auf den Rest $p - m$, so wird man nachsehen, ob das auch der $n$te ist — andernfalls hat man sich verrechnet.

Ist man bei Ausführung der Division $\frac{m}{p}$ auf den Rest $r_n = p - m$ gekommen und nennt man die vorhergehenden Reste $m, r_1, r_2 \dots r_{n-1}$, die nachfolgenden $r_{n+1}, r_{n+2} \dots$, so läſst sich zeigen, daſs stets $r + r_n = r_1 + r_{n+1} = r_2 + r_{n+2} \dots\dots = p$ ist.

Bezeichnet man ferner die einzelnen Ziffern der ersten Periodenhälfte (A) mit $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$, die der zweiten Periodenhälfte (B) mit $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$, so folgt, daſs $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 \dots = a_n + b_n = 9$ ist.

Es ist nämlich (1) $10m - a_1 p = r_1$;

ferner $10 r_n - b_1 p = r_{n+1}$ oder, da $r_n = p - m$ ist,

(2) $10(p - m) - b_1 p = r_{n+1}$.

Durch Addition der Gleichungen (1) und (2) ergiebt sich

$$(10 - a_1 - b_1) \cdot p = r_1 + r_{n+1}.$$

Die Summe $r_1 + r_{n+1}$ hat hiernach p zum Teiler. Da nun sowohl $r_1 < p$, als auch $r_{n+1} < p$ ist, muſs $r_1 + r_{n+1} = p$ sein. Demnach ist $(10 - a_1 - b_1) p = p$, also $10 - a_1 - b_1 = 1$ oder $a_1 + b_1 = 9$.

Ebenso ist (1′) $10 r_1 - a_2 p = r_2$;

ferner (2′) $10 r_{n+1} - b_2 p = r_{n+2}$.

Durch Addition der Gleichungen (1′) und (2′) ergiebt sich

$10(r_1 + r_{n+1}) - (a_2 + b_2) p = r_2 + r_{n+2}$, oder, da $r_1 + r_{n+1} = p$ ist,

$$(10 - a_2 - b_2) p = r_2 + r_{n+2}.$$

Hieraus folgt wie vorhin $r_2 + r_{n+2} = p$ und $a_2 + b_2 = 9$ u. s. f.

Es gilt also der folgende Satz:

XIII. Ist die Gröſse der Periode eines Bruches $\frac{m}{p}$ eine gerade Zahl ($e = 2n$), so ergänzen die n Ziffern der ersten Periodenhälfte sich der Reihe nach mit den n Ziffern der zweiten Periodenhälfte zu 9.

Beispiele: s. oben $\frac{7}{13} = 0{,}538|461\ldots\ldots$ und $\frac{17}{19} = 0{,}894736842|105263157\ldots\ldots$
Man braucht also bei gerader Periode nur die erste Hälfte der Ziffern durch Division zu berechnen, während man die Ziffern der zweiten Hälfte findet, indem man die gefundenen der Reihe nach von 9 subtrahiert.

Als sofort verständlicher Zusatz zu diesem Satze möge ausgesprochen werden: „Ist p eine mit ν Ziffern geschriebene Zahl, so beginnt die zweite Hälfte der Periode des Bruches $\frac{1}{p}$ mit $\nu - 1$ Ziffern 9."

Beispiele: 1) $\frac{1}{17} = 0{,}05882352|94117647\ldots\ldots$

2) $\frac{1}{101} = 0{,}00|99\ldots\ldots$

§ 11 Die Zurückverwandlung periodischer Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

Bereits am Anfang des vorigen Paragraphen ist gezeigt, dafs der Bruch $\frac{m}{p}$, welcher dem gegebenen periodischen Dezimalbruch mit der $e$ziffrigen Periode C gleich ist, durch die Gleichung bestimmt wird

$$\frac{m}{p} = \frac{C}{10^e - 1}.$$

Diese Zurückverwandlung findet sich ja auch in den Schulbüchern, in der Regel so dargestellt:

$$x = 0{,}142857\ldots\ldots \qquad 1000000\,x = 142857{,}142857\ldots\ldots$$
$$x = 0{,}142857\ldots\ldots$$

Durch Subtraktion ergiebt sich

$$999999\,x = 142857$$
$$x = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}.$$

Mit kleineren Zahlen kann man (nach § 8) so operieren:

$$100\,x = 14{,}285714\ldots \qquad \text{oder } 10\,x = 1{,}4285714\ldots$$
$$2\,x = 0{,}285714\ldots \qquad 3\,x = 0{,}4285714\ldots$$
$$98\,x = 14 \qquad 7\,x = 1$$
$$x = \frac{14}{98} = \frac{1}{7} \qquad x = \frac{1}{7}.$$

Ferner war im vorigen Paragraphen gezeigt, dafs in den Fällen, wo die Summe der ersten und zweiten Hälfte einer $2n$ziffrigen Periode $= 10^n - 1$ ist, der Bruch $\frac{m}{p}$ durch die Gleichung ermittelt werden kann: $\frac{m}{p} = \frac{A+1}{10^n+1}$ (Satz XI.).

In der Darstellung mit x würde das zweite dort angeführte Beispiel so zu behandeln sein:

$$x = 0{,}894736842|105263157$$
$$10^9 \cdot x = 894736842{,}105263157894\ldots$$
$$x = 0{,}89473642105\ldots$$

Durch Addition ergiebt sich $(10^9 + 1)\,x = 894736842{,}99999999999\ldots = 894736843$

$$x = \frac{894736843}{1000000001} = \frac{17}{19}.$$

Sei in einem unreinperiodischen Dezimalbruch C die γziffrige Zahl vor der Periode (vgl § 2) und D die $e$ziffrige Zahl in der Periode, so ergiebt sich als Wert des Bruches x, aus welchem dieser unreinperiodische Dezimalbruch durch Ausdividieren entstanden ist:

$$x = \frac{C}{10\gamma} + \frac{D}{10\gamma(10^e - 1)} = \frac{C \cdot 10^e + D - C}{10\gamma(10^e - 1)}.$$

Beispiele (in der üblichen Darstellungsweise):

$$\begin{aligned} x &= 0{,}278\overline{846153}\ldots\ldots \\ 10^9 \cdot x &= 278846153{,}846153\ldots\ldots \\ 10^3 \cdot x &= 278{,}846153\ldots\ldots \\ \hline 999999000\,x &= 278845875 \\ x &= \frac{278845875}{999999000} = \frac{29}{104} \end{aligned}$$

(Für das Heben des zunächst erhaltenen Bruches ist offenbar die Kenntnis der Faktoren der Zahlen $10^e - 1$ [vgl. § 4] von Bedeutung).

Ergänzen sich (wie in diesem Beispiel) die beiden Hälften A und B der $2n$ziffrigen Periode zu $10^n - 1$, so ist (nach § 10, Satz XI.):

$$\frac{D}{10^{2n} - 1} = \frac{A + 1}{10^n + 1}.$$

Für den Bruch x ergiebt sich also $x = \frac{C}{10\gamma} + \frac{A + 1}{10\gamma(10^n + 1)} = \frac{C \cdot 10\gamma + A + C + 1}{10\gamma(10^n + 1)}$.

Der obige unreinperiodische Dezimalbruch $0{,}27\overline{8846153}\ldots\ldots$ (x) läfst sich also auch etwas kürzer so verwandeln:

$$\begin{aligned} 10^6 \cdot x &= 278846{,}153846153\ldots \\ 10^3 \cdot x &= 278{,}846153845\ldots \\ \hline 1001000 \cdot x &= 279124{,}999999999\ldots = 279125 \\ x &= \frac{279125}{1001000} = \frac{29}{104}. \end{aligned}$$

(durch Addition)

Eine andere Art der Verwandlung unreinperiodischer Dezimalbrüche ergiebt sich aus der Umformung

$$x = \frac{C}{10\gamma} + \frac{D}{10\gamma(10^e - 1)} = \frac{1}{10\gamma}\left(C + \frac{D}{10^e - 1}\right)$$

1\. Beispiel. $0{,}8\overline{54}54\ldots\ldots = \frac{1}{10}\left(8 + \frac{54}{99}\right) = \frac{1}{10} \cdot \frac{792 + 54}{99} = \frac{846}{990} = \frac{47}{55}$,

2\. Beispiel. $0{,}41\overline{6}6\ldots = \frac{1}{100}\left(41 + \frac{6}{9}\right) = \frac{1}{100} \cdot \frac{369 + 6}{9} = \frac{375}{900} = \frac{5}{12}$.

3\. Beispiel. $0{,}354\overline{6}66\ldots\ldots = \frac{1}{1000}\left(354 + \frac{6}{9}\right) = \frac{1}{1000} \cdot \frac{3186 + 6}{9} = \frac{3192}{9000} = \frac{133}{375}$.

Und so liefsen sich noch andere Kunstgriffe zur Zurückverwandlung periodischer Dezimalbrüche in gemeine Brüche angeben.

Zweiter Abschnitt.

Die Gröfse der Periode (e) der Brüche $\frac{1}{p}$ im zahlentheoretischen Zusammenhang und ihre Berechnung.

§ 12. Berechnung der Gröfse der Periode durch Congruenzen.

Nach § 4 ist die Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{p}$ der Exponent e der niedrigsten Potenz von 10, für welche $10^e \equiv 1 \pmod{p}$ ist; von diesem Exponenten e war bewiesen, dafs er $= p - 1$ oder ein Teil davon, $\frac{p-1}{d}$, ist.

Nach der von Gaufs eingeführten Bezeichnung sagt man dann, die Zahl 10 **gehöre** zum Exponenten e modulo p.

Gehört 10 zu keinem kleineren Exponenten als $p - 1$, ist also erst

$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p},$$

so nennt man 10 eine **primitive Wurzel der Primzahl** p.*)

Will man nun die Gröfse e der Periode des Dezimalbruches bestimmen, so ist es durchaus nicht nötig, die Division $1:p$ so lange fortzusetzen, bis einmal der Rest 1 wiederkehrt (eine Prozedur, die für einigermafsen gröfsere Primzahlen höchst umständlich und langweilig wäre).

Man bildet vielmehr, da ja e ein Teiler von $p-1$ sein mufs, für die verschiedenen Teiler t von $p-1$, von den niederen zu den höheren fortschreitend, die Congruenzen, deren linke Seite 10^t ist (wobei der 3te und 4te Lehrsatz von § 7 angewendet werden) so lange, bis man auf eine Congruenz $10^t \equiv 1 \pmod{p}$ kommt. Dieses letzte t ist dann die gesuchte Zahl e.

Beispiel: Wieviel Stellen hat die Periode des Bruches $\frac{1}{1213}$?**)

Da $p - 1 = 1212 = 2^2 \cdot 3 \cdot 101$ ist, sind die Teiler $2, 3, 4, 6, 12, 101, 202 \ldots\ldots$

Nun ist $10^4 \equiv 296 \pmod{1213}$ $\quad 10^5 \equiv 534 \quad 10^{50} \equiv 138$

$10^6 \equiv 488 \quad 10^{10} \equiv 101 \quad 10^{100} \equiv 849$

$10^{12} \equiv 396 \quad 10^{20} \equiv 497$

$10^{101} \equiv 10^{100} \cdot 10 \equiv 8490 \equiv -1 \quad 10^{40} \equiv 770$

$10^{202} \equiv (10^{101})^2 \equiv (-1)^2 \equiv 1 \pmod{1213}$.***)

Also ist die Periodengröfse $\quad e = 202 = \frac{p-1}{6}$.

(Dafs die in den Burckhardt'schen Tafeln angegebene Periodengröfse 1212 falsch sein mufs, ergiebt sich auch ohne Ausführung der obigen Rechnung sofort aus dem im nächsten Paragraphen angegebenen Kriterium).

---

*) Euler. Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia, Nov. Comm. Petrop. XVIII, p. 85. Man nennt wohl auch die Zahlen, welche zu keinem niedrigeren Exponenten als $p-1$ (modulo p) gehören, **primitive Zahlen.**

**) Die Primzahl 1213 gehört zu denjenigen 9 Primzahlen, für welche in den Burckhardt'schen Tafeln die Periodengröfse falsch angegeben ist, wie Dr. F. Kessler bemerkt hat (Hoppe, Archiv (2) III. 99—102).

***) Bei dem Fortschreiten durch Quadrieren der Congruenzen leisten Tafeln der Quadratzahlen gute Dienste.

§ 13. Ermittelung der linearen Formen der Primzahlen, von welchen 10 quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

Jenachdem die Congruenz

$$x^2 \equiv D (\text{mod. } p),$$

in welcher D als relativ prim gegen die Primzahl p vorausgesetzt wird, möglich oder lösbar ist (Wurzeln hat) oder nicht, heifst die Zahl D **quadratischer Rest** oder **quadratischer Nichtrest der Zahl p.** Es läfst sich leicht zeigen, dafs von den Zahlen $1, 2, 3 \ldots p - 1$ genau die Hälfte $\left(\text{also } \frac{p-1}{2}\right)$ Reste, die andere Hälfte Nichtreste sind.

Beispiel. Welches sind die quadratischen Reste von 13?

	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2
	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
Reste dieser Zahlen modulo 13 sind	1	4	9	3	12	10	10	12	3	9	4	1.

Demnach sind quadratische Reste von 13 die Zahlen 1, 4, 9, 3, 12, 10,
quadratische Nichtreste von 13 die Zahlen 2, 5, 6, 7, 8, 11

(Selbstverständlich ist jede Zahl über p qu. Rest oder Nichtrest, jenachdem die ihr congruente Zahl unter p qu. Rest oder Nichtrest ist).

Das Produkt zweier Reste oder zweier Nichtreste ist ein Rest, das Produkt eines Restes und eines Nichtrestes ist ein Nichtrest.

Beispiele: a) $4 \cdot 9 \equiv 36 \equiv 3$ (mod. 13), $9 \cdot 10 \equiv 90 \equiv 12$ (mod. 13) — 3 und 12 sind Reste,
b) $5 \cdot 7 \equiv 35 \equiv 9$ (mod. 13), $5 \cdot 8 \equiv 40 \equiv 1$ (mod. 13) — 9 und 1 sind Reste,
c) $4 \cdot 5 \equiv 20 \equiv 7$ (mod. 13), $4 \cdot 11 \equiv 44 \equiv 5$ (mod. 13) — 7 und 5 sind Nichtreste.

Ferner wird in der Zahlentheorie das folgende (sogenannte **Euler'sche**) Kriterium für den quadratischen **Charakter** einer Zahl (demgemäfs sie qu. Rest oder Nichtrest von p ist) bewiesen:

„Eine Zahl D ist quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem in der Congruenz

$$D^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \,(\text{mod. } p)$$

das obere oder das untere Zeichen zu wählen ist."

Oder anders ausgedrückt: „Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs D ein quadratischer Rest von p sei, läfst sich durch die Congruenz $D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \,(\text{mod. } p)$ aussprechen."

Weifs man umgekehrt, dafs z. B. die Zahl 10 quadratischer Rest einer Primzahl p ist, so besteht die Congruenz

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \,(\text{mod. } p).$$

Bei Untersuchung der Gröfse der Periode des Bruches $\frac{1}{p}$ (die nach § 4, Lehrsatz III., $= p - 1$ oder ein Teil davon, $\frac{p-1}{d}$ sein mufs) entscheidet also der quadratische Charakter von p darüber, ob

$$10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \,(\text{mod. } p) \text{ ist oder nicht.}$$

Es ist somit von Wichtigkeit, es einer Primzahl p gleich ansehen zu können, ob 10 quadratischer Rest oder Nichtrest dieser Primzahl ist. Um nun die linearen Formen (d. h. ganze rationale Funktionen 1. Grades mit ganzzahligen Coeffizienten) der Primzahlen aufstellen zu können,

von welchen 10 qu. Rest oder Nichtrest ist, mufs man die linearen Faktoren derjenigen Primzahlen kennen, von welchen die Faktoren von 10, 2 und 5, Reste oder Nichtreste sind.

Für 2 hatte schon Fermat (wahrscheinlich durch Induktion) diese Formen aufgestellt. Euler sich vergeblich um einen Beweis bemüht und zuerst Lagrange*) den folgenden Satz bewiesen:

„Die Zahl 2 ist quadratischer Rest aller Primzahlen von einer der beiden Formen $8n \pm 1$, dagegen Nichtrest aller Primzahlen vor einer der beiden Formen $8n \pm 3$."

Auch für die Primzahl 5 hat zuerst Lagrange den folgenden Satz bewiesen:

„Die Zahl 5 ist quadratischer Rest aller Primzahlen von einer der beiden Formen $10n \pm 1$, dagegen Nichtrest aller Primzahlen von einer der beiden Formen $10n \pm 3$."**)

Aus diesen Formen von Primzahlen, für welche 2 und 5 Reste oder Nichtreste sind, sollen nun (ohne Benutzung des Reziprozitätssatzes) diejenigen Formen abgeleitet werden, für welche 10 quadratischer Rest oder Nichtrest ist. Benutzt werden soll der oben angeführte Satz, dafs das Produkt zweier Reste oder zweier Nichtreste ein Rest, das Produkt eines Restes und eines Nichtrestes ein Nichtrest ist.

Das Produkt $10 = 2 \cdot 5$ wird hiernach quadratischer Rest von p sein,

wenn p von einer der Formen $8n \pm 1$ und zugleich von einer der Formen $10n \pm 1$ ist, oder wenn p von einer der Formen $8n \pm 3$ und zugleich von einer der Formen $10n \pm 3$ ist;

dagegen wird 10 quadratischer Nichtrest von p sein,

wenn p von einer der Formen $8n \pm 1$ und zugleich von einer der Formen $10n \pm 3$ ist, oder wenn p von einer der Formen $8n \pm 3$ und zugleich von einer der Formen $10n \pm 1$ ist.

Um nun die Form aller Zahlen x zu finden, welche gleichzeitig den beiden Bedingungen

$$x \equiv \alpha \pmod{8} \quad \text{und} \quad x \equiv \beta \pmod{10} \text{ genügen,}$$

ersetzt man die erste Congruenz durch die Gleichung $x = \alpha + 8t$ (wo t irgend eine ganze Zahl ist); dann mufs t so bestimmt werden, dafs $\alpha + 8t \equiv \beta \pmod{10}$

$$\text{oder} \qquad 8t \equiv \beta - \alpha \pmod{10} \text{ ist.}$$

Da 8 und 10 den Faktor 2 enthalten, ist diese Congruenz nur möglich, wenn auch $\beta - \alpha$ durch 2 teilbar ist; dann ist
$$4t \equiv \frac{\beta - \alpha}{2} \pmod{5}.$$

Ist also γ irgend eine der Zahlen t, welche dieser Congruenz genügen, so sind alle Zahlen t in der Form $t \equiv \gamma \pmod{5}$ oder $t = \gamma + 5n$ enthalten (wo n irgend eine ganze Zahl ist).

Demnach sind alle Zahlen x in der Form enthalten $x = \alpha + 8\gamma + 40n$,

$$\text{oder} \qquad x \equiv \delta \pmod{40},$$

wenn δ für $\alpha + 8\gamma$ gesetzt wird.

---

*) Recherches d'Arithmétique. Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, 1775, p. 349, 351.

**) Vgl. Gauss. Disquis. Arithmet. artt. 121—123.

Unter den verschiedenen Beweisen für diese Restkriterien für 2 und 5 (und ebenso für —2, —1, 3) mögen an dieser Stelle auch diejenigen erwähnt sein, die der Verfasser mit Hilfe eines Eisenstein'schen Satzes abgeleitet hat: H. Bork, Untersuchungen über das Verhalten zweier Primzahlen in Bezug auf ihren quadratischen Restcharakter (Programm des Askanischen Gymnasiums zu Berlin, Ostern 1885) p. 6, 7, 14, 15.

Handelt es sich also z. B. um die Formen aller Zahlen x, welche gleichzeitig den beiden Bedingungen genügen $x \equiv 3 \pmod{8}$ und $x \equiv -3 \pmod{10}$,
so ist $x = 3 + 8t$, $3 + 8t \equiv -3 \pmod{10}$

$$8t \equiv -6 \pmod{10}$$
$$4t \equiv -3 \pmod{5}.$$

Hieraus folgt $t \equiv 3 \pmod{5} = 3 + 5n$
oder auch $t \equiv -2 \pmod{5} = -2 + 5n$
und $x = 3 - 16 + 40n \equiv -13 \pmod{40}$.

10 ist also nach dem oben Ausgeführten Rest aller Zahlen von der Form $40n - 13$.

Macht man auch die anderen möglichen Kombinationen, so ergiebt sich:

„Die Zahl 10 ist quadratischer Rest aller Primzahlen von einer der Formen $40n \pm 1$, $40n \pm 3$, $40n \pm 9$, $40n \pm 13$, sie ist quadratischer Nichtrest aller Primzahlen von einer der Formen $40n \pm 7$, $40n \pm 11$, $40n \pm 17$, $40n \pm 19$."

Ist 10 quadratischer Nichtrest von p, also $10^{\frac{p-1}{2}}$ nicht $\equiv 1 \pmod{p}$, so kann auch nicht, wenn d irgend einen Divisor von $p-1$ bedeutet, $10^{\frac{p-1}{2d}} \equiv 1 \pmod{p}$ sein. Denn wäre $10^{\frac{p-1}{2d}} \equiv 1 \pmod{p}$, so müfste auch $10^{\frac{p-1}{2d}\cdot d} = 10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Ist aber 10 quadratischer Rest von p, also $10^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$, so mufs der Exponent, zu welchem $10 \pmod{p}$ gehört, ein Teiler von $\frac{p-1}{2}$ sein. Es läfst sich also der folgende Satz aussprechen:

XIV. Für Primzahlen von einer der Formen $40n \pm 1, 3, 9, 13$ ist die Gröfse der Periode von $\frac{1}{p}$ entweder $= \frac{p-1}{2}$ oder ein Teil davon; für Primzahlen von einer der Formen $40n \pm 7, 11, 17, 19$ ist die Gröfse der Periode von $\frac{1}{p}$ weder $= \frac{p-1}{2}$ noch ein Teil davon.

§ 14. Erleichterung der Berechnung der Periodengröfsen und Vereinfachung ihrer Registrierung durch Beachtung des quadratischen Restcharakters der 10 für die Primzahlen.

Von der Primzahl 1213 war in § 12 angeführt, dafs ihre Periodengröfse in den Burckhardt'schen Tafeln fälschlich als 1212 angegeben ist In der That sieht man ja daraus, dafs sie von der Form $40n + 13$ ist, jetzt sofort, dafs ihre Periodengröfse 606 oder ein Teil davon sein mufs (sie ist 202 nach § 12). So wird durchschnittlich für die Hälfte aller Primzahlen die Berechnung der Periodengröfse durch Beachtung des Satzes XIV., bezw. ihres quadratischen Restcharakters, bedeutend vereinfacht, wie es die folgenden Beispiele zeigen (deren Periodengröfsen gleichfalls in den Burckhardt'schen Tafeln falsch angegeben sind).

1. Beispiel: Wieviel Stellen hat die Periode des Bruches $\frac{1}{3467}$?

Da 3467 von der Form $40n - 13$ ist, mufs schon $10^{1733} \equiv 1 \pmod{3467}$ sein. Da aber 1733 eine Primzahl ist, also keine Teiler hat, kann 10 zu keiner kleineren Zahl als 1733 nach dem Modulus 3467 gehören; die Periodengröfse ist demnach 1733 (bei B. fälschlich 3466).

2. Beispiel: Wieviel Stellen hat die Periode des Bruches $\frac{1}{1597}$?

Da 1597 von der Form $40n - 3$ ist, mufs schon $10^{798} \equiv 1 \pmod{1597}$ sein.

Nun ist $798 = 2 \cdot 3 \cdot 133$; die Teiler von $\frac{p-1}{2}$ sind also 2, 3, 133......

$$\text{Es ist } 10^{9} \equiv 122 \pmod{1597}.$$

Geht man von dieser Congruenz durch Quadrieren und Multiplizieren aufwärts, so erhält man:

$$10^{18} \equiv 511, \quad 10^{20} \equiv -4, \quad 10^{40} \equiv 16$$
$$10^{60} \equiv -64, \quad 10^{120} \equiv 902, \quad 10^{124} \equiv 144$$
$$10^{133} \equiv 122 \cdot 144 \equiv 1 \pmod{1597}.$$

Also ist die Periodengröfse $133 = \frac{p-1}{12}$ $\left(\text{bei B. fälschlich } \frac{p-1}{6}\right)$.

Die Beachtung des quadratischen Restcharakters der Primzahlen hat Herrn Dr. Kessler zu der abgekürzten Registrierung der Resultate seiner Rechnungen geführt, die sich in der Tafel des Anhangs findet. Hier sind alle diejenigen Primzahlen fortgelassen, deren Periodengröfse $p-1$ oder $\frac{p-1}{2}$ (oder bei denen $d = 1$ oder 2) ist. Die Benutzung der Tafel setzt natürlich daneben den Gebrauch eines vollständigen Primzahlen-Verzeichnisses voraus. Für die in der Tafel nicht aufgeführten Primzahlen von einer der Formen $40n \pm 1$, 3, 9, 13 ist dann $d = 2$, für die Primzahlen von einer der Formen $40n \pm 7$, 11, 17, 19 ist $d = 1$ zu nehmen.

Ein Nachzählen einer vollständigen Tafel der Periodengröfsen ergiebt, dafs für rund zwei Drittel aller Primzahlen $d = 1$ oder 2 ist; bei der abgekürzten Kessler'schen Registrierung wird also nur etwa der dritte Teil des Raumes gebracht, wie bei vollständiger Registrierung.

Eine Bemerkung von W. Shanks, dafs $p-1$ selbst immer häufiger als Periodengröfse aufträte (oder d immer häufiger $= 1$ werde, oder 10 immer häufiger als primitive Wurzel von Primzahlen vorkäme), je weiter man in der Reihe der Primzahlen fortschreitet*), wird durch die Kessler'schen Tabellen nicht bestätigt.

Das Verhältnis der Primzahlen, für welche $d = 1$ ist, zur Gesamtzahl der Primzahlen scheint hiernach vielmehr ziemlich constant zu sein.

§ 15. Beachtung der Bedingungen, unter denen 10 cubischer, biquadratischer und bibiquadratischer Rest von p ist.

Wenn allgemeiner die Congruenz $x^n \equiv D \pmod{p}$, wo wieder D relativ prim gegen die Primzahl p ist, möglich sein soll, mufs

$$D^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p} \text{ sein.}$$

Ist also 10 $n$ter Potenzrest von p, so mufs die Congruenz bestehen

$$10^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Bei der Berechnung der Periodengröfse der Primzahlen ist es nun höchst zweckmäfsig, nicht nur den quadratischen, sondern auch den cubischen, biquadratischen und bibiquadratischen Restcharakter von 10 zu beachten; das spart in vielen Fällen jede weitere Rechnung und erleichtert in vielen anderen Fällen die Rechnung sehr bedeutend.

*) Proceedings of the Royal Society. 1877, November.

Der cubische Restcharakter der 10 ist durch den folgenden Satz bestimmt:*)

„Ist $p = 6n + 1 = a^2 + 3b^2$, und ist ab durch 10 teilbar, dann (und nur dann) besteht die Congruenz $10^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1 \pmod{p}$.“

Oder um dieses Kriterium hier in anderer Form als Lehrsatz über periodische Dezimalbrüche auszusprechen:

XV. Nur für Primzahlen von der Form $6n + 1 = a^2 + 3b^2$ ist dann, wenn entweder a oder b den Faktor 5 enthält, die Gröfse der Periode $= \frac{p-1}{3}$ oder ein Teil davon.

Zur Ermittelung des biquadratischen Restcharakters von 10 ergiebt sich aus den Gaufs'schen Kriterien für 2 und 5 der folgende Satz:**)

„Ist $p = 4n + 1 = a^2 + b^2$, und wird $a \equiv 1 \pmod{4}$ genommen (also, wenn a von der Form $4n + 3$ ist, $-a$ statt a, da $-a$ dann die Form $4n + 1$ hat), so ist 10 dann (und nur dann) biquadratischer Rest für p, wenn einer der vier Ausdrücke

$$b,\ a(b \pm 4),\ (b + a)(b - 2),\ (b - a)(b + 2)$$

durch 40 teilbar ist.“

Das Kriterium dafür, ob 10 Rest achter Potenz (bibiquadratischer) Rest von p ist, lautet nach Jacobi folgendermafsen:***)

„Ist $p = a^2 + b^2 = c^2 + 2d^2$, $a \equiv c \equiv 1 \pmod{4}$, so sind die Bedingungen dafür, dafs 10 bibiquadratischer Rest von p sei: $d(c^2 + d^2) \equiv 0 \pmod{5}$, ferner:

I. wenn b durch 8 teilbar ist,

$$b \equiv 0 \pmod{5},\ ac(c^2 - d^2) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}b + \frac{1}{4}(a-1)} \pmod{5},$$

II. wenn $b - 4$ durch 8 teilbar ist,

$$a \equiv 0 \pmod{5},\ bc(c^2 - d^2) \equiv (-1)^{\frac{1}{8}(b-4) + \frac{1}{4}(a-1)} \pmod{5}.“$$

Die Benutzung dieser Kriterien für die Berechnung der Periodengröfsen wird natürlich durch Tabellen der Quadratzahlen und der Zerlegung der Primzahlen in $a^2 + b^2$, $a^2 + 2b^2$, $a^2 + 3b^2$ wesentlich erleichtert. Nun noch drei Beispiele.

1. Wieviel Stellen hat die Periode des Bruches $\frac{1}{11083}$?

Da $p - 1 = 11082 = 2 \cdot 3 \cdot 1847$ ist, kommt nur der quadratische und der cubische Restcharakter der 10 in Frage

Da 11083 die Form $40n + 3$ hat, ist 10 quadratischer Rest von 11083.

Zur Entscheidung über den cubischen Restcharakter hat man die Zerlegung

$11083 = 100^2 + 3 \cdot 19^2$ zu beachten:

da 100 durch 5 teilbar ist, ist 10 auch cubischer Rest von 11083.

---

*) Dieser Satz (den schon Euler kannte und der sich aus den allgemeinen Sätzen Jacobi's ableiten läfst) findet sich, ebenso wie die anderen Restkriterien dieses Paragraphen, in der Programmabhandlung von Reuschle (das Kriterium für den Restcharakter 8ter Potenz ist dem Verfasser von Jacobi brieflich mitgeteilt).

**) Reuschle. Seite 6.

***) Aus einem Briefe Jacobi's an Reuschle, von diesem auf Seite 9 seiner mehrfach erwähnten Arbeit mitgeteilt.

Da 1847 eine Primzahl ist, und da nach Satz XIV die Periodengröfse ein Teil von $\frac{p-1}{2}$, nach Satz XV dieselbe ein Teil von $\frac{p-1}{3}$ sein mufs, ist die Periodengröfse $e = 1847 = \frac{p-1}{6}$.

2. Wieviel Stellen hat die Periode des Bruches $\frac{1}{11149}$?

Da $p-1 = 11148 = 2^2 \cdot 3 \cdot 929$ ist, kommt der quadratische, biquadratische und cubische Restcharakter der 10 in Frage. Nun ist aber 11149 von der Form $40n - 11$, also (nach Satz XIV) die Periodengröfse kein Teil von $\frac{p-1}{2}$. Ferner ist $11149 = 49^2 + 3 \cdot 54^2$, mithin, da weder 49 noch 54 durch 5 teilbar ist, die Periodengröfse auch kein Teil von $\frac{p-1}{3}$. Die Periodengröfse ist also hier $11148 = p - 1$.

3. Wieviel Stellen hat die Periode des Bruches $\frac{1}{10889}$?

Es ist $p-1 = 10888 = 2^3 \cdot 1361$, also der quadratische, biquadratische und bibiquadratische Restcharakter der 10 zu untersuchen. Zunächst ist 10 quadratischer Rest von 10889, da dieses von der Form $40n + 9$ ist.

Ferner ist $10889 = a^2 + b^2 = 67^2 + 80^2 = (-67)^2 + 80^2$; da 80 durch 40 teilbar ist, mufs 10 auch quadratischer Rest von 10889 sein.

Die weitere Zerlegung nach $p = a^2 + b^2 = c^2 + 2d^2$

ergiebt $10889 = (-67)^2 + 80^2 = 33^2 + 2 \cdot 70^2$.

Danach sind die Jacobischen Kriterien dafür, dafs 10 bibiquadratischer Rest von 10889 sei, nicht erfüllt, weil $-67 \cdot 33\,(33^2 - 70^2)$ nicht $\equiv (-1)^{10-17} \equiv -1 \pmod{5}$, sondern vielmehr $\equiv +1 \pmod{5}$ ist. Also ist die Periodengröfse $= \frac{p-1}{4}$ $\left(\text{nicht } \frac{p-1}{8}!\right) = 2722$.

§ 16. Periodengröfsen und Tafeln der Indices.

Ist g irgend eine **primitive Wurzel** von p, d. h. eine Zahl, welche zum Exponenten $p-1$ **gehört,** so dafs also erst $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ wird (s. § 12), so geben die Potenzen $g^0, g^1, g^2 \ldots\ldots g^{p-1}$ lauter verschiedene Reste (modulo p).

Denn wären die Reste von zweien dieser Potenzen, g^α und g^β (wo $p-1 > \alpha > \beta$ ist), einander gleich, wäre also $g^\alpha \equiv g^\beta \pmod{p}$,

so müfste ja $g^{\alpha-\beta} \equiv 1 \pmod{p}$ sein, was der Voraussetzung widerspricht.

Durchläuft also der Exponent $\varkappa$ der Congruenz $g^\varkappa \equiv h \pmod{p}$ alle Werte von 1 bis $p-1$, so mufs h in irgend einer anderen Reihenfolge auch alle Werte $1, 2, 3 \ldots . p-1$ annehmen; jeder Zahl h ist ein Exponent $\varkappa$ zugeordnet. Primitive Wurzeln existieren immer, und zwar ist ihre Anzahl $= \varphi(p-1)$, wo $\varphi(p-1)$ wieder (wie in § 5) die Anzahl der Zahlen bedeutet, die kleiner als $p-1$ und relativ prim dazu sind.

Der Exponent $\varkappa$ heifst der **Index** der Zahl h für die Grundzahl g; man schreibt

$$\text{Ind. } h = \varkappa,$$

indem man die Basis g, so lange sie unverändert bleibt, bei der Bezeichnung fortläfst Wenn man die Indices um $r(p-1)$ vermehrt, so wird an der Congruenz nichts geändert, denn da $g^{p-1} \equiv 1$, also auch $g^{(p-1)r} \equiv 1 \pmod{p}$ ist,

so ist $g^\varkappa \cdot g^{(p-1)r} \equiv g^\varkappa$

d. h. die Congruenz bleibt ungeändert, wenn man den Index um ein Vielfaches von r vermehrt; man hat also die Indices nur in Bezug auf den Modul $p-1$ zu betrachten. Ebenso kann man zu h ein Vielfaches von p hinzufügen, man hat also die Zahlen nur in Bezug auf den Modul p zu betrachten.

Die Indices spielen in der Zahlentheorie eine ähnliche Rolle wie die Logarithmen in der Analysis. Wie man jede Zahl als Potenz einer festen „Basis" darstellen kann ($g^x = h$, x Logarithmus von h), so kann man jede durch p nicht teilbare ganze Zahl als Potenz einer ganzen Zahl g modulo p darstellen ($g^x \equiv h$ (mod. p), x Index von h). Der Analogie von Logarithmen und Indices entspricht es auch, dafs für beide ganz analoge Sätze gelten. So entspricht dem ersten logarithmischen Hauptsatz der folgende Satz:

$$(1)\quad \text{Ind. } a + \text{Ind. } b + \text{Ind. } c \ldots \equiv \text{Ind. } abc \ldots (\text{mod. } p-1).$$

Beweis. Sei
$$\left.\begin{array}{l} a \equiv g^\alpha (\text{mod. } p) \\ b \equiv g^\beta (\quad - \quad - \quad) \\ c \equiv g^\gamma (\quad - \quad - \quad) \\ \ldots\ldots \end{array}\right\}, \text{ so ist } \left\{\begin{array}{l} \alpha \equiv \text{Ind. } a (\text{mod } p-1) \\ \beta \equiv \text{Ind. } b (\quad - \quad - \quad) \\ \gamma \equiv \text{Ind. } c (\quad - \quad - \quad) \\ \ldots\ldots \end{array}\right.$$

Durch Multiplikation ergiebt sich $abc \ldots \equiv g^{\alpha+\beta+\gamma\ldots} (\text{mod. } p)$.

Hieraus folgt $\alpha + \beta + \gamma \ldots \equiv \text{Ind. } abc \ldots (\text{mod. } p-1)$

oder $\text{Ind. } a + \text{Ind. } b + \text{Ind. } c \ldots \equiv \text{Ind. } abc \ldots (\text{mod. } p-1)$.

Aus diesem Satz folgt unmittelbar der andere:

$$(2)\quad \text{Ind. } (a^n) \equiv n \cdot \text{Ind. } a (\text{mod. } p-1).$$

Man braucht, um ihn zu erhalten, nur in dem ersten Satz $a = b = c = \ldots.$ zu setzen.

Tafeln der Indices sind in der Zahlentheorie von ähnlicher Bedeutung wie die Logarithmentafeln. Weifs man aus einer Tafel der Periodengröfsen von einer Primzahl p, dafs sie eine primitive Wurzel der Einheit ist, so erhält man durch Ausführung der Division $1:p$ bis zum Schlufs der Periode die Indices der Zahlen und umgekehrt die Zahlen, die zu gegebenen Indices gehören. Ist z. B. $p = 29$, so sind die 28 Reste der Division die Zahlen 10, 13, 14, 24, 8, 22, 17, 25, 18, 6, 2, 20, 26, 28, 19, 16, 15, 5, 21, 7, 12, 4, 11, 23, 27, 9, 3, 1, d. h. es ist $10^1 \equiv 10$, $10^2 \equiv 13$, $10^3 \equiv 14$, $10^4 \equiv 24$, $10^5 \equiv 8$ (mod. 29) ......

Die Indices der Zahlen 1 28 werden also durch die folgende Tafel gefunden:

mod. 29	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Index	28	11	27	22	18	10	20	5	26	1	23	21	2	3

mod. 29	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Zahl	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Index	17	16	7	9	15	12	19	6	24	4	8	13	25	14

Umgekehrt findet man die Zahlen, welche zu gegebenen Indices gehören, aus der folgenden Tafel:

mod. 29	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Index	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Zahl	10	13	14	24	8	22	17	25	18	6	2	20	26	28

mod. 29	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Index	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Zahl	19	16	15	5	21	7	12	4	11	23	27	9	3	1

Jacobi hat für die Primzahlen und Primzahlpotenzen unter 1000 die Tafeln der Indices ausrechnen lassen und sie mit einer Einleitung, welche die Methoden der Berechnung theoretisch entwickelt, unter dem Titel „Canon Arithmeticus"*) veröffentlicht.

In der Einleitung führt Jacobi auch aus, wie die Burckhardt'schen Tafeln der Periodengröfsen die Berechnung der Indices-Tafeln erleichtern, indem sie viele primitive Wurzeln liefern.

*) C. A. sive Tabulae quibus exhibentur pro singulis numeris primis vel primorum potestatibus infra 1000 numeri ad datos indices et indices ad datos numeros pertinentes (Berlin 1839).

Es giebt nämlich (aufser 1, 2, 5) unter 2500 365 Primzahlen und unter ihnen 148, von denen 10 eine primitive Wurzel ist (7, 17, 19 ...... 2447, 2459, 2473). Für alle Primzahlen ferner von der Form $4m+3$, für welche die Periodengröfse $\frac{p-1}{2}$ ist, mufs -10 oder $p-10$ eine primitive Wurzel sein. Solche Primzahlen sind 3, 31, 43 ...... 2347, 2351, 2399, im ganzen 73 unter 2500, so dafs von $148+73=221$ eine primitive Wurzel bekannt und nur noch für 144 Primzahlen unter 2500 eine solche zu suchen ist.

Jacobi bemerkt weiter noch, dafs es unter 2500

76	Primzahlen von der Form	$4m+1$	giebt, von denen	± 10 primitive Wurzel ist,
72	- - - -	$4m+3$	- - - -	$+10$ - - -
73	- - - -	$4m+3$	- - - -	-10 - - -,

und dafs sich vermuten läfst, es werde bei wachsenden Grenzen das Verhältnis dieser Zahlen gegen 1 convergieren (vgl. § 14, Schlufs).

Nach diesen Ausführungen ist klar, dafs die im Anhang mitgeteilten Kessler'schen Tabellen von Periodengröfsen der Primzahlen für Indicestabellen in höheren Zahlengebieten eine Vorarbeit sind.

§ 17. **Einige Anwendungen der Indices.**

Besitzt man umgekehrt Indices-Tafeln, aber nicht Tafeln der Periodengröfsen, so kann man leicht zu jeder Primzahl die Periodengröfse finden.

Beispiel. Wieviel Ziffern hat die Periode des Bruches $\frac{1}{73}$?

In einer Tafel der Indices findet sich 5 als eine primitive Wurzel von 73 und 9 als Index der Zahl 10; es ist also

$$10 \equiv 5^9 (\text{mod. } 73).$$

Da $10^x \equiv 1 (\text{mod } 73)$ sein soll, so mufs also

$5^{9x} \equiv 1 (\text{mod. } 73)$ oder nach § 16 Satz (2)

$$9x \cdot 1 \equiv 72 (\text{mod. } 72)$$

oder $9x \equiv 0 (\text{mod. } 72)$,

d. h. $x \equiv 0 (\text{mod. } 8)$ sein.

Der kleinste Wert für x ist also 8; somit ist 8 auch die Periodengröfse.

In der That ist $\frac{1}{73} = 0,\overline{01369863}\ldots\ldots$

Mit Hilfe der Indices lassen sich ferner alle Congruenzen 1. Grades mit einer Unbekannten lösen, da man diejenigen, welche zusammengesetzte Zahlen zu Moduln haben, leicht auf solche zurückführen kann, deren Moduln Primzahlen sind. Sei z. B. die Congruenz zu lösen

$$17x \equiv 21 (\text{mod. } 43),$$

so ist nach § 16 Satz (1)

$$\text{Ind. } 17 + \text{Ind. } x \equiv \text{Ind. } 21 (\text{mod. } 43).$$

Eine primitive Wurzel von 43 ist 3, Ind. 17 für diese Grundzahl 3 ist 38, Ind. 21 ist 36; demnach ist

$$38 + \text{Ind. } x \equiv 36 (\text{mod. } 42)$$

$$\text{Ind. } x \equiv -2 \equiv 40 (\text{mod. } 42).$$

Da zum Index 40 die Zahl 24 gehört, so ergiebt sich

$$x \equiv 24 (\text{mod. } 43).$$

In der That läfst $17 \cdot 24$ oder 408 durch 43 dividiert den Rest 21.

Eine wichtigere Anwendung der Indices ist die zur Auflösung der binomischen Congruenzen n ten Grades, also der Congruenzen von der Form $ax^n \equiv b (\text{mod. } p)$. Man erhält nämlich nach § 16 (1) und (2)

$$\text{Ind. } a + n \cdot \text{Ind. } x \equiv \text{Ind. } b (\text{mod. } p - 1)$$

$$\text{oder} \quad n \cdot \text{Ind. } x \equiv \text{Ind. } b - \text{Ind. } a (\text{mod. } p - 1).$$

Die Entscheidungssätze darüber, wann diese Congruenz unmöglich ist, wann sie nur eine und wann mehrere Wurzeln hat, sollen hier nicht angeführt, sondern nur ein Beispiel gegeben werden.

Sei $x^6 \equiv 11 (\text{mod. } 43)$, so ergiebt sich aus der Tafel der Indices
$6 \cdot \text{Ind. } x \equiv 30 (\text{mod. } 42)$, wofür man schreiben darf
$\text{Ind. } x \equiv 5 (\text{mod. } 7)$.

Die 6 nach dem Modul 42 incongruenten Werte von Ind. x sind hiernach 5, 12, 19, 26, 33, 40; ihnen entsprechen nach den Tafeln für x die Werte 28, 4, 19, 15, 39, 24.

Der Kürze wegen sei nur für den kleinsten dieser sechs Werte die Probe angegeben:

$$4^6 = 4096, \quad 4096 = 95 \cdot 43 + 11.$$

§ 18. Beziehung zwischen den n n_1-ziffrigen Gruppen solcher Perioden, deren Gröfse ein Produkt $n \cdot n_1$ ist.

Der folgende Satz schliefst sich eigentlich an den Satz X des § 10 als an einen besonderen Fall an, ist aber seiner geringeren praktischen Wichtigkeit wegen nicht dort unter den „Haupteigenschaften" der periodischen Dezimalbrüche aufgeführt worden, sondern soll erst jetzt ausgesprochen und bewiesen werden:

XVI. Ist die Gröfse der Periode eines Bruches $\frac{m}{p}$ ein Produkt $(e = n \cdot n_1)$, und bezeichnet man die n auf einander folgenden n_1 ziffrigen Gruppen der Periode der Reihe nach mit $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$, so ist die Summe $A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n$ durch die aus n_1 Neunen gebildete Zahl $10^{n_1} - 1$ teilbar, und zwar ist sie höchstens das $(n-1)$fache von $10^{n_1} - 1$.

Beweis. Es ist

$$\frac{m}{p} = \frac{A_1 \cdot 10^{(n-1)n_1} + A_2 \cdot 10^{(n-2)n_1} + \ldots\ldots + A_{n-1} \cdot 10^{n_1} + A_n}{10^{n \cdot n_1} - 1}$$

$$= \frac{A_1 (10^{(n-1)n_1} - 1) + A_2 (10^{(n-2)n_1} - 1) + \ldots\ldots + A_{n-1}(10^{n_1} - 1) + A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{10^{nn_1} - 1}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $10^{nn_1} - 1$ und Division durch $10^{n_1} - 1$ ergiebt sich

$$\frac{m(10^{nn_1} - 1)}{p(10^{n_1} - 1)} = A_1 \cdot \frac{10^{(n-1)n_1} - 1}{10^{n_1} - 1} + A_2 \cdot \frac{10^{(n-2)n_1} - 1}{10^{n_1} - 1} + \ldots\ldots + A_{n-1} + \frac{A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n}{10^{n_1} - 1}.$$

Da nun $10^{nn_1} - 1$ sowohl durch p als auch durch $10^{n_1} - 1$ ohne Rest teilbar ist, und da p kein Faktor von $10^{n_1} - 1$ sein kann, mufs $\frac{m(10^{n \cdot n_1} - 1)}{p(10^{n_1} - 1)}$ eine ganze Zahl sein; ebenso müssen auch $\frac{10^{(n-1)n_1} - 1}{10^{n_1} - 1}, \frac{10^{(n-2)n_1} - 1}{10^{n_1} - 1} \ldots\ldots$ ganze Zahlen sein. Also ist auch $\frac{A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n}{10^{n_1} - 1}$ eine ganze Zahl, d. h. $A_1 + A_2 + \ldots\ldots + A_n$ ist durch $10^{n_1} - 1$ ohne Rest teilbar. Und da die Ziffern, mit welchen $A_1, A_2 \ldots$ geschrieben werden, nicht sämtlich

Neunen sein können, mufs $A_1 + A_2 + \ldots + A_m < n(10^{n_1} - 1)$ sein und kann höchstens das $(n-1)$fache von $10^{n_1} - 1$ sein, w. z. b. w.

1. Beispiel. $\frac{17}{19} = 0,\overline{894736842105263157}\ldots\ldots$ (vgl. § 10).

Da die Periode 18ziffrig ist, kann man nehmen:

I. $n = 2,\ n_1 = 9$

$$\begin{array}{rl} A_1 = & 894736842 \\ A_2 = & 105263157 \\ \hline A_1 + A_1 = & 999999999 \\ = & 1 \cdot 999999999 \end{array}$$

II. $n = 3,\ n_1 = 6$

$$\begin{array}{rl} A_1 = & 894736 \\ A_2 = & 842105 \\ A_3 = & 263157 \\ \hline A_1 + A_2 + A_3 = & 1999998 \\ = & 2 \cdot 999999 \end{array}$$

III. $n = 6,\ n_1 = 3$

$$\begin{array}{rl} A_1 = & 894 \\ A_2 = & 736 \\ A_3 = & 842 \\ A_4 = & 105 \\ A_5 = & 263 \\ A_6 = & 157 \\ \hline A_1 + A_2 \ldots + A_6 = & 2997 \\ = & 3 \cdot 999 \end{array}$$

IV. $n = 9,\ n_1 = 2$

$$\begin{array}{rl} A_1 = & 89 \\ A_2 = & 47 \\ A_3 = & 36 \\ A_4 = & 84 \\ A_5 = & 21 \\ A_6 = & 05 \\ A_7 = & 26 \\ A_8 = & 31 \\ A_9 = & 57 \\ \hline A_1 + A_2 \ldots + A_9 = & 396 \\ = & 4 \cdot 99 \end{array}$$

2. Beispiel. $\frac{21}{31} = 0,\overline{677419354838709}\ldots\ldots$

Hier ist die Periode 15ziffrig, und man erhält, je nachdem man 3 Gruppen von 5 Ziffern oder 5 Gruppen von 3 Ziffern addiert, entweder $199998 = 2 \cdot 99999$ oder $2997 = 3 \cdot 999$.

§ 19. Kriterium der Teilbarkeit einer Zahl durch eine Primzahl mit Benutzung der Periodengröfse dieser Primzahl.

Um über die Teilbarkeit irgend einer Zahl durch eine Primzahl (aufser 2 und 5) mit Benutzung der Periodengröfse e dieser Primzahl zu entscheiden, hat man die beiden Fälle zu trennen, dafs diese Gröfse e eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Im ersten Fall entscheidet das folgende Kriterium:

XVII. Um die Teilbarkeit einer Zahl N durch eine Primzahl p zu untersuchen, deren Periodengröfse e eine ungerade Zahl ist, zerlege man N von rechts nach links in e-ziffrige Gruppen $A, B, C \ldots$; N ist dann durch p teilbar oder nicht teilbar, je nachdem $A + B + C \ldots$ durch p teilbar oder nicht teilbar ist.

Beweis. Da $10^0, 10^e, 10^{2e}, 10^{3e} \ldots \equiv 1 \pmod{p}$ sind, so ist auch

$$\begin{array}{l} A \cdot 10^0 \equiv A \pmod{p} \\ B \cdot 10^e \equiv B \quad - \ - \\ C \cdot 10^{2e} \equiv C \quad - \ - \quad \text{u. s. f.,} \end{array}$$

also auch $A \cdot 10^0 + B \cdot 10^e + C \cdot 10^{2e} \ldots \equiv A + B + C \ldots \pmod{p}$, d. h.

$$N \equiv A + B + C \ldots \pmod{p}, \text{ w. z. b. w.}$$

Beispiel. Ist die Zahl 2993533029072157 durch 41 teilbar?

Die Periodengröfse von 41 ist 5; man zerlegt daher:

$$\begin{array}{cccc} D & C & B & A \\ 2| & 99353| & 30290| & 72157 \end{array} \text{ und addiert } \begin{array}{r} 72157 \\ 30290 \\ 99353 \\ 2 \\ \hline 201802. \end{array}$$

Da $201802 \equiv 0 \pmod{41}$ ist, mufs auch 2993533029072157 durch 41 teilbar sein.

Man erkennt leicht als einen besonderen Fall des allgemeinen Kriteriums XVII die Regel der Schulbücher: „Eine Zahl ist durch 3 (oder 9) teilbar, wenn ihre **Quersumme***) durch 3 (oder 9) teilbar ist."

Ist die Periodengröfse e der Primzahl p eine ungerade Zahl ($e = 2n$), so gilt folgendes Kriterium:

XVIII. Um die Teilbarkeit einer Zahl N durch eine Primzahl p zu untersuchen, deren Periodengröfse e eine gerade Zahl ($e = 2n$) ist, zerlege man N von rechts nach links in n-ziffrige Gruppen A, A', B, B', C, C'....; N ist dann durch p teilbar oder nicht teilbar, je nachdem $(A + B + C....) - (A' + B' + C'...)$ durch p teilbar oder nicht teilbar ist.

Beweis. Da $10^0, 10^{2n}, 10^{4n} \ldots\ldots \equiv 1 \pmod{p}$
und $10^n, 10^{3n}, 10^{5n} \ldots \equiv -1 \pmod{p}$ sind (vgl. § 10), so ist auch

$$
\begin{aligned}
A \cdot 10^0 &\equiv A \pmod{p},\\
A' \cdot 10^n &\equiv -A' \pmod{p},\\
B \cdot 10^{2n} &\equiv B \pmod{p},\\
B' \cdot 10^{3n} &\equiv -B' \pmod{p} \text{ u. s. f.,}
\end{aligned}
$$

also auch $A \cdot 10^0 + A' \cdot 10^n + B \cdot 10^{2n} + B' \cdot 10^{3n} + \ldots \equiv (A + B + C\ldots) - (A' + B' + C'\ldots) \pmod{p}$,
d. h $N \equiv (A + B + C\ldots) - (A' + B' + C'\ldots) \pmod{p}$, w. z. b. w.

Beispiel. Ist die Zahl 2993533029072157 durch 73 teilbar?

Die Periodengröfse von 73 ist 8; man zerlegt daher

$$
\begin{array}{cccc} B' & B & A' & A \\ 2993| & 5330| & 2907| & 2157. \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 2157 \\ 5330 \\ \hline A + B = 7487 \end{array}
\qquad
\begin{array}{r} 2907 \\ 2993 \\ \hline A' + B' = 5900 \end{array}
$$

$$(A + B) - (A' + B') = 1587.$$

Da $1587 \equiv -19 \pmod{41}$ ist, kann auch 2993533029072157 nicht durch 73 teilbar sein.

Ein besonderer Fall des Kriteriums XVIII ist die Schulregel:

„Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn die Differenz der Quersumme der geradstelligen und der ungradstelligen Ziffern durch 11 teilbar ist."

So schliefst diese Abhandlung mit sehr elementaren Dingen, wie sie auch mit solchen anfing. In den Zusammenhang der Periodengröfsen mit der Theorie der Potenzreste haben die §§ 13—15 einen Blick thun lassen. Dafs und wie aber diese Theorie mit der Lehre von der Kreisteilung oder zahlentheoretisch mit der Theorie der aus Einheitswurzeln gebildeten complexen ganzen Zahlen zusammenhängt, und dafs in deren Coeffizienten die innersten und interessantesten Beziehungen der Zahlen zueinander stecken, wissen die Kundigen.

Zweck dieser Arbeit war es, gleichsam von der Schulbank aus in zahlentheoretische Gedankenreihen einzuführen.

*) „Quersumme" bezeichnete Kummer in seinem Kolleg über Zahlentheorie als einen ziemlich „queren" Ausdruck — doch usus est tyrannus.

Anhang.

Abgekürztes Verzeichnis der Primzahlen p unter 100000 mit Angabe der Divisoren q (mit Ausschlufs von 1 und 2) zur Berechnung der Gröfse e der Periode des Dezimalbruchs, der gleich $\frac{1}{p}$ ist, nach der Formel $e = \frac{p-1}{q}$.

Für die in dieser Tafel nicht vorkommenden Primzahlen (die aus einer Primzahlentafel zu entnehmen sind) ist

$q = 2$, wenn p eine der Formen $40n \pm 1, 3, 9, 13$ hat,
$q = 1$, wenn p eine der Formen $40n \pm 7, 11, 17, 19$ hat.

(Berechnet und aufgestellt für alle Primzahlen unter 100000 von **Dr. F. Kessler,** Wiesbaden).

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
11	5	757	28	1721	4	2729	4	3823	3	4877	4	6007	7	7027	6	8111	10	9161	40	10331	5
37	12	769	4	723	6	749	3	851	5	903	3	079	6	039	18	117	4	181	3	369	4
41	8	773	4	747	6	791	90	853	4	909	3	089	8	043	14	161	8	209	4	399	6
53	4	797	4	753	6	797	4	877	4	957	12	091	3	127	7	167	3	281	10	429	11
73	9	809	4	831	6	837	4	919	6	969	6	101	5	129	12	191	6	283	6	477	6
79	6	829	3	879	6	857	7	929	8	973	22	133	4	151	26	221	3	293	4	501	3
101	25	853	4	889	16	953	3	3931	3	993	3	151	6	211	7	293	4	337	3	601	10
103	3	859	33	901	5	2969	8	4001	8	4999	14	163	78	213	4	317	18	349	3	613	14
127	3	907	6	931	5	3037	12	003	46	5009	8	203	14	237	18	329	8	397	116	711	18
137	17	967	3	933	92	041	8	013	118	011	3	229	3	253	98	387	14	403	6	729	18
139	3	997	6	951	10	049	6	021	15	023	3	271	6	297	8	419	3	419	17	733	4
173	4	1009	4	987	6	061	15	093	186	051	101	277	4	331	5	461	3	433	9	753	21
211	7	013	4	1993	3	109	21	133	4	081	4	299	67	333	12	521	12	439	6	771	5
239	34	031	10	2011	3	121	20	159	6	101	3	361	4	351	6	527	3	463	3	837	172
241	8	061	5	053	6	169	44	201	56	113	3	373	6	369	4	539	3	511	6	867	6
251	5	093	4	087	7	181	5	241	4	119	6	379	3	417	3	581	3	521	16	889	4
271	54	201	6	129	4	187	18	253	4	171	47	397	82	481	10	597	4	533	4	891	9
277	4	213	6	131	3	191	110	273	3	197	12	421	3	489	4	599	6	551	10	909	9
281	10	231	30	161	72	217	3	297	3	209	14	427	6	529	4	609	8	613	36	957	4
317	4	237	6	213	4	229	3	357	18	237	68	449	4	537	3	629	3	619	3	10973	4
331	3	249	6	281	10	253	6	373	4	261	5	451	3	549	3	677	12	649	16	11071	18
349	3	289	14	287	3	319	6	397	14	333	4	469	7	561	4	681	10	661	7	083	6
353	11	321	24	311	10	329	4	409	8	407	3	481	24	573	12	689	4	677	4	087	23
397	4	409	44	333	4	373	4	483	18	437	4	491	5	589	7	737	3	679	6	093	4
421	3	423	9	377	9	449	8	493	4	443	6	521	8	603	6	761	10	689	28	113	3
449	14	451	5	381	5	457	9	507	6	471	10	529	6	621	15	779	399	733	4	117	4
457	3	459	9	393	13	491	5	513	3	477	4	547	6	649	4	803	6	859	3	161	36
463	3	483	6	441	8	499	11	519	6	521	16	569	4	669	27	849	16	901	825	197	4
521	10	489	6	467	18	517	4	549	3	557	6	577	3	681	4	893	4	929	8	213	4
547	6	493	4	477	4	541	177	621	5	569	4	581	5	717	4	923	6	941	5	251	5
607	3	499	7	503	9	557	14	637	76	641	12	607	3	723	6	929	62	9973	18	261	5
613	12	597	12	521	4	583	3	649	664	647	3	637	14	741	9	933	4	10037	26	311	30
617	7	601	8	531	55	613	6	657	8	689	18	689	4	757	4	8941	3	093	4	317	12
641	20	609	8	551	6	637	4	663	21	693	4	761	4	789	3	9001	8	099	3	321	10
643	6	613	4	557	4	671	10	729	4	711	10	763	42	841	140	007	3	133	4	329	6
661	3	627	6	591	10	691	3	733	4	717	4	781	5	7993	3	013	4	193	7	369	14
673	3	637	4	647	3	697	3	789	21	791	6	791	10	8009	4	041	8	243	18	411	5
691	3	657	3	659	3	733	4	801	6	801	4	841	8	011	3	091	909	253	4	437	4
733	12	669	3	677	12	739	3	813	6	849	4	907	6	081	4	127	3	271	130	443	6
739	3	693	4	683	6	793	3	831	6	851	3	6997	4	089	6	133	6	303	3	489	4
751	6	1699	3	2689	64	3797	4	4861	5	5953	3	7001	4	8101	5	9151	6	10321	4	11491	15

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
11527	3	13267	18	15053	4	16843	42	18427	6	20147	14	21523	6	23251	5	25321	4	26801	8	28493	4
551	6	309	3	061	3	871	14	433	3	161	12	529	8	293	4	339	3	821	3	541	5
587	6	327	3	091	5	879	6	451	3	173	4	557	4	311	370	357	12	833	3	591	10
689	24	399	14	101	25	901	5	481	14	219	11	589	3	447	19	373	4	839	6	621	9
717	4	417	3	131	5	903	3	493	4	249	8	601	6	549	7	391	10	849	4	627	6
779	3	513	8	161	4	921	40	517	6	269	9	613	12	557	4	453	6	861	79	649	4
801	4	553	7	241	4	16927	3	541	5	287	21	649	1968	561	20	561	4	881	8	663	3
831	70	567	3	269	11	17021	5	553	3	323	6	661	3	599	54	579	3	893	4	723	6
11969	34	591	10	277	4	041	6	617	13	341	5	739	3	623	3	601	1024	26921	8	751	50
12007	3	597	4	289	12	047	3	671	10	353	3	751	58	629	3	603	6	27031	6	771	21
037	4	619	11	313	8	053	12	679	6	357	4	787	6	689	6	609	4	067	78	789	3
043	6	633	3	331	3	077	6	701	5	369	16	871	54	773	4	639	6	077	4	807	3
071	34	649	16	361	60	093	4	731	5	389	3	881	10	801	8	693	4	091	3	813	14
097	8	681	4	373	12	117	4	757	6	443	6	929	4	813	4	717	12	109	3	837	18
109	3	687	3	401	56	137	3	797	148	477	4	943	3	857	3	741	11	197	4	843	38
157	6	693	42	451	3	203	6	917	4	521	18	961	18	911	30	747	6	241	8	867	6
197	4	729	4	497	13	209	4	18973	124	593	11	991	30	917	4	771	15	259	7	901	5
211	3	757	38	541	21	293	12	19001	8	641	8	21997	12	23929	4	801	10	271	6	921	4
253	4	831	6	559	6	299	9	009	4	681	44	22013	4	24001	24	819	13	277	12	28927	9
277	4	877	4	601	40	317	12	013	4	693	28	037	4	007	3	841	10	281	4	29059	3
289	32	907	34	641	40	341	3	051	3	707	14	039	6	077	4	849	36	361	4	077	4
301	5	921	20	649	32	359	6	069	3	717	4	091	5	091	11	889	16	397	12	129	4
329	4	13999	6	661	3	401	4	081	24	719	6	093	6	097	3	931	5	437	4	137	3
343	3	14009	4	671	10	449	4	087	3	731	5	123	6	103	9	933	4	449	4	173	4
401	10	051	5	679	6	489	8	157	4	749	3	129	4	109	3	981	3	457	3	179	3
433	3	081	8	733	6	509	3	183	3	771	5	133	4	121	6	25997	4	481	6	191	30
511	6	107	6	761	40	539	3	211	5	773	4	157	4	133	12	26017	3	529	8	201	16
517	84	149	27	797	4	551	6	237	4	887	3	159	18	169	8	021	5	539	7	231	10
541	3	173	4	809	4	569	6	249	6	903	7	171	3	179	157	041	8	541	17	251	5
619	3	197	156	817	3	573	4	289	4	921	8	277	4	181	5	053	12	581	35	269	3
637	4	221	5	877	28	597	4	301	5	929	48	279	6	281	10	083	18	631	6	303	13
641	4	281	12	889	4	599	6	333	4	959	42	397	4	373	6	107	6	653	4	333	4
671	70	293	12	937	8	623	9	373	4	20981	5	447	3	379	3	153	7	673	3	347	6
689	16	321	4	15973	132	659	3	381	15	21001	84	453	4	391	18	161	10	691	3	387	14
703	3	323	14	16001	8	681	16	387	6	013	4	481	8	413	4	183	13	733	6	401	6
721	6	369	32	057	9	729	16	391	14	061	5	483	6	421	15	227	18	751	30	411	5
739	3	389	3	061	5	837	196	423	3	067	6	501	3	469	3	237	4	773	4	437	12
757	6	401	4	063	3	851	25	441	12	139	3	531	3	481	4	249	4	809	4	453	148
763	18	407	21	069	3	881	8	477	6	157	4	543	3	551	10	263	9	817	61	527	19
799	6	411	5	087	3	911	6	489	48	163	6	571	5	571	15	293	12	893	4	569	12
829	3	419	3	111	10	977	21	501	25	169	16	573	4	611	5	317	18	917	4	573	4
853	28	431	26	141	5	17989	3	531	3	187	18	613	4	733	4	339	13	941	5	611	329
889	4	449	4	189	19	18041	82	597	4	191	10	621	3	793	8	347	6	961	1398	629	9
893	4	461	3	249	12	043	62	603	6	193	3	651	15	809	8	357	4	27997	4	683	18
919	6	533	28	301	5	047	7	777	3	221	5	699	9	851	5	431	10	28001	8	761	6
967	3	551	30	333	4	049	16	813	4	277	18	717	4	889	8	437	4	027	6	803	6
12973	6	557	6	361	10	077	4	841	310	283	6	777	3	943	3	449	16	031	10	833	3
13001	8	563	18	369	62	097	3	843	6	313	9	807	3	24979	3	479	6	051	3	837	4
009	6	653	4	381	3	121	8	861	3	319	374	853	4	25013	4	489	14	081	16	851	5
033	8	683	6	453	6	131	37	867	6	341	5	877	4	033	21	557	4	087	3	881	10
049	4	771	7	477	4	149	13	891	3	379	7	921	6	117	4	561	4	099	3	917	4
093	6	797	4	481	8	181	3	937	7	391	6	22961	4	127	17	591	10	111	30	921	20
147	14	821	3	493	4	223	3	19963	6	397	12	23041	20	147	6	647	3	123	6	947	14
151	10	827	6	519	6	233	43	20011	3	401	856	053	12	169	104	681	20	151	10	29983	3
159	6	831	10	633	3	257	7	021	13	433	3	057	11	171	5	683	6	181	5	30089	8
171	3	851	15	651	5	307	6	023	3	481	4	117	4	189	3	693	4	201	4	091	5
183	3	869	3	693	6	329	4	029	3	491	5	167	3	219	3	701	3	211	5	133	4
219	3	929	8	729	24	367	3	071	6	493	4	189	11	237	4	711	10	393	21	139	3
241	8	951	10	759	18	371	5	089	4	499	3	197	12	243	6	717	4	409	4	161	80
249	46	14983	3	763	578	401	4	107	6	517	4	201	50	261	3	729	8	447	3	169	6
13259	7	15013	4	16811	5	18413	4	20117	4	21521	10	23209	4	25309	3	26759	34	28463	133	30211	3

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
30223	8	32257	9	34039	18	35969	8	37591	14	39761	16	41611	3	43201	54	45319	14	47659	8	49669	3
241	14	299	7	157	4	36013	4	657	9	769	6	641	8	207	3	329	4	681	4	681	10
259	8	321	4	231	6	037	6	693	36	799	18	647	3	261	15	361	4	699	7	741	5
293	4	341	3	253	4	061	3	699	3	883	6	681	20	283	38	481	8	711	26	747	6
367	8	353	3	261	5	107	14	811	19	901	21	729	4	321	60	523	6	717	4	789	3
391	6	359	6	273	9	131	5	813	12	937	13	771	5	391	10	557	14	741	7	801	4
517	4	371	5	303	3	161	8	897	3	39979	9	801	50	397	38	569	4	743	3	811	5
529	36	401	54	327	9	209	4	957	4	40009	24	813	4	481	4	613	724	791	10	831	10
553	3	411	5	361	4	217	3	37997	4	013	4	849	4	517	44	641	8	797	4	853	4
631	6	491	3	369	4	241	6	38047	3	063	33	851	5	579	3	673	3	809	82	877	4
637	18	533	4	471	30	313	3	053	14	129	32	863	3	591	10	751	10	837	4	989	7
643	6	561	4	501	3	343	9	113	3	151	50	893	4	597	4	757	12	917	4	991	10
649	12	573	4	511	84	373	4	149	3	169	4	911	6	609	6	45841	4	933	46	49999	78
661	5	609	4	513	3	433	3	197	4	213	6	41959	6	613	4	46049	4	969	4	50021	5
703	3	653	6	519	6	457	3	231	10	231	18	42013	12	633	9	133	4	47981	5	023	9
707	26	707	6	613	4	469	3	237	316	237	42	043	546	649	64	153	3	48049	48	053	4
713	11	771	5	651	3	493	4	281	6	241	16	071	70	651	15	187	14	073	3	077	4
727	8	797	4	687	3	559	54	287	3	289	16	073	8	711	80	229	14	197	4	093	14
757	4	803	6	693	4	583	8	431	70	351	6	157	36	721	4	237	6	281	4	131	5
763	6	831	14	729	6	607	8	449	108	361	8	169	4	753	3	273	3	311	10	221	3
773	4	839	78	747	6	653	4	461	15	429	9	187	6	793	7	309	51	397	4	227	22
809	8	887	21	807	3	677	4	557	12	459	3	193	3	801	8	351	50	413	4	287	8
817	9	911	6	819	3	691	5	567	11	471	6	197	44	853	4	381	3	481	6	311	80
829	3	917	4	843	6	721	6	609	4	507	6	209	4	891	3	399	114	487	3	321	10
841	60	957	22	847	7	761	10	629	29	529	16	239	14	933	4	441	40	491	13	377	3
853	4	969	8	849	352	781	3	693	4	531	3	293	4	961	8	447	3	541	5	383	3
881	10	971	15	871	22	793	9	707	6	543	3	307	6	969	4	471	6	571	3	441	4
937	8	32999	14	877	4	809	4	787	9	559	14	337	3	43973	4	477	4	619	3	461	3
30971	19	33037	6	897	3	821	5	851	8	591	6	373	4	44017	3	489	8	649	4	587	6
31013	4	049	8	961	8	847	3	861	335	609	12	379	3	041	24	573	4	661	5	671	10
039	6	053	4	34981	5	871	10	917	4	699	8	391	10	053	6	639	6	673	9	773	12
051	225	071	10	35053	4	901	3	933	4	759	6	397	6	221	3	649	68	677	4	821	15
081	12	073	3	089	16	919	18	38959	86	801	6	407	7	257	3	681	6	761	10	849	16
121	16	091	15	117	4	929	32	39019	3	819	3	409	6	269	7	687	8	787	6	857	3
123	38	151	10	129	8	943	3	041	4	841	8	437	4	281	10	757	4	823	3	891	7
147	6	181	7	141	35	947	58	089	8	853	4	451	3	293	4	819	3	883	6	923	18
177	3	199	6	149	3	973	36	133	4	867	6	457	3	357	4	853	26	907	6	929	6
183	3	301	37	201	10	36997	4	157	4	879	54	491	5	381	35	877	4	48991	6	957	4
189	3	317	4	221	5	37003	6	161	4	933	12	533	4	449	4	889	4	49003	6	969	4
231	18	329	4	317	4	021	5	181	3	961	16	569	8	491	3	901	25	009	8	971	3
237	12	331	3	401	4	039	6	199	6	973	4	589	3	497	3	933	6	057	7	50989	3
249	18	403	6	419	3	049	8	217	3	40993	21	611	5	533	4	957	4	069	3	51031	6
277	4	413	4	437	12	171	3	251	25	41017	3	641	16	563	6	993	8	081	4	061	15
393	3	427	6	449	6	201	8	293	4	117	4	649	4	621	5	46997	4	117	4	133	4
397	4	461	7	461	9	243	6	317	4	143	3	667	6	633	7	47161	72	169	8	151	6
477	12	469	3	491	7	253	4	343	3	201	20	689	4	641	240	221	3	171	11	157	4
511	274	521	4	509	11	321	8	359	22	231	14	703	33	729	4	293	6	177	3	197	4
573	4	533	4	521	8	357	4	367	9	263	28	727	3	797	6	317	6	279	6	199	138
643	26	587	14	527	3	363	6	373	204	269	3	773	148	887	3	353	3	297	287	229	3
699	3	601	24	533	12	369	24	397	4	281	60	793	3	44983	3	389	3	333	6	241	42
741	5	613	4	569	4	397	4	409	6	341	3	797	4	45053	4	419	21	339	3	283	6
799	26	637	4	597	22	423	3	461	5	357	4	821	5	077	4	441	8	363	6	329	4
849	24	641	8	617	3	501	3	511	18	413	68	841	36	121	240	491	3	369	4	427	18
873	3	721	12	677	6	507	42	541	3	467	6	853	4	127	3	521	8	393	9	449	8
31973	4	751	6	731	9	517	4	569	4	479	6	929	4	131	5	533	204	409	4	481	24
32077	36	797	4	797	6	529	8	607	3	491	5	953	18	139	3	569	16	411	5	511	6
089	4	809	4	801	20	537	8	619	3	521	8	42961	40	197	4	591	10	417	3	517	6
141	5	811	5	803	102	549	9	631	30	539	3	43013	4	233	11	599	6	459	3	521	4
203	6	827	26	863	3	561	12	679	6	593	3	037	1484	281	32	609	8	477	14	607	3
213	4	931	39	897	7	567	9	719	14	603	22	093	4	293	4	623	3	547	14	613	92
32251	8	33961	30	35911	6	37571	5	39733	6	41609	14	43189	3	45317	4	47653	6	49663	31	51647	7

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
51673	3	53593	8	55633	3	57301	5	59557	6	61483	6	63337	3	65293	4	67409	4	69857	2183	72091	3
769	4	609	4	681	6	331	13	561	40	561	152	367	3	357	4	411	21	929	8	139	3
787	54	653	4	711	30	373	4	611	3	609	24	391	6	371	3	481	10	959	14	161	16
797	4	681	10	721	4	397	12	617	3	637	4	397	4	437	6	579	3	69991	10	169	8
829	3	717	4	733	4	427	6	651	25	651	5	409	8	449	4	651	25	70003	18	173	4
853	6	781	5	763	14	457	27	659	61	657	21	493	12	497	8	679	38	051	3	211	3
871	30	857	3	813	6	487	3	671	10	717	6	521	4	521	4	699	9	099	7	253	6
893	4	861	5	819	7	493	4	693	4	757	4	541	3	581	3	733	4	117	12	271	6
907	6	887	3	837	4	571	15	707	62	781	5	559	6	599	26	741	5	121	4	313	3
941	5	899	3	889	28	601	4	743	9	819	3	589	7	609	8	783	11	123	6	337	3
949	9	923	6	897	3	641	88	753	7	837	12	601	4	617	3	789	21	177	3	341	5
51973	4	53951	50	903	7	649	4	791	10	861	5	649	72	677	6	801	24	237	36	481	80
52009	264	54001	16	921	48	679	6	809	4	961	20	689	4	701	9	843	6	241	4	493	4
021	15	013	14	55987	6	689	4	863	3	981	5	691	11	707	94	927	3	249	6	533	4
051	3	037	4	56009	8	773	4	921	112	61991	10	709	3	719	6	931	5	309	3	559	834
067	14	121	4	053	4	787	6	929	12	62003	2138	761	8	729	26	933	12	313	187	577	3
069	3	133	4	113	3	853	4	951	218	047	3	799	434	809	12	957	4	327	3	613	4
081	10	151	10	123	22	57943	3	59971	3	053	6	809	16	831	10	67987	18	439	82	643	6
177	3	181	15	131	5	58031	14	60013	12	071	6	823	3	837	4	68023	3	501	15	649	4
189	3	293	4	167	3	111	6	037	6	081	4	841	672	843	14	041	42	537	3	661	3
201	6	361	40	179	3	129	4	041	8	129	22	901	9	881	4	053	4	627	6	679	6
237	12	371	5	197	6	147	6	083	22	137	8	907	6	921	20	111	10	657	8	689	8
253	4	413	4	209	16	169	8	091	3	143	3	913	8	65929	4	209	84	687	9	727	3
313	13	421	3	237	4	171	21	101	601	171	5	929	8	66161	10	213	4	717	4	733	12
321	32	437	4	333	4	189	13	103	3	201	40	977	11	271	10	227	6	729	168	797	4
517	4	469	89	369	208	199	14	133	12	213	4	63997	4	293	4	261	5	769	4	823	3
529	4	493	6	377	8	231	10	139	3	233	8	64013	4	301	5	281	6	849	18	859	3
543	3	499	3	383	3	237	4	149	11	351	10	063	3	337	8	311	22	867	18	871	42
561	40	559	6	401	4	321	6	161	16	477	4	081	4	361	4	371	3	877	4	889	8
579	2921	583	3	431	10	363	6	169	12	483	14	091	5	373	12	389	417	921	10	893	4
609	12	631	18	437	4	441	40	209	8	563	6	189	9	403	34	399	22	969	8	901	9
639	62	667	6	473	3	453	6	217	3	581	21	231	6	413	4	449	32	70981	3	937	3
711	70	673	67	477	4	477	4	271	10	597	4	237	4	481	14	489	8	71011	5	973	6
769	4	679	6	479	6	613	4	317	4	653	12	271	10	499	3	531	5	023	7	72997	4
813	6	721	10	569	6	657	8	331	3	659	9	279	6	529	4	597	44	059	3	73009	4
837	84	751	6	597	4	693	12	373	4	683	6	327	3	533	4	611	3	089	6	013	4
861	3	787	6	599	6	733	4	449	4	743	3	333	18	569	8	683	6	161	10	037	4
889	22	799	6	611	15	771	9	457	8	761	6	399	6	571	21	713	3	209	6	063	3
903	3	881	70	629	117	831	10	601	50	773	4	453	4	683	22	737	3	233	8	121	20
951	6	917	4	659	21	889	34	631	30	801	4	489	4	721	48	749	3	293	4	141	3
963	6	941	5	701	7	921	12	649	12	851	3	499	7	791	10	821	93	317	4	181	5
52973	4	973	6	713	8	991	10	689	8	869	3	513	21	809	4	881	80	329	4	237	204
53047	3	54979	3	731	5	58997	4	703	3	921	1144	591	6	841	40	68917	4	333	68	243	6
077	4	55009	4	767	3	59021	13	727	3	929	16	601	4	853	4	69001	6	347	6	277	4
093	4	021	7	773	4	029	3	733	6	969	34	621	9	889	8	061	3	359	6	291	5
101	3	051	3	809	4	113	3	761	8	981	5	683	3	919	6	067	18	389	9	303	3
117	4	061	5	813	4	141	5	773	4	62987	14	717	12	931	3	119	14	503	3	351	10
129	8	117	4	821	5	209	4	793	3	63031	10	871	26	947	22	127	3	569	6	369	4
171	65	207	3	827	18	221	9	811	5	067	6	921	4	973	6	197	4	597	4	453	4
239	6	213	4	893	12	239	6	821	5	073	3	927	9	66977	7	259	3	707	6	459	7
281	16	243	186	921	4	263	7	859	7	079	6	969	6	67003	6	337	8	761	48	471	10
327	7	249	4	929	8	281	624	889	6	097	33	64997	4	021	5	401	8	809	6	477	18
353	8	291	3	941	3	333	28	901	3	113	28	65011	3	121	10	403	6	821	15	561	24
359	6	333	12	957	4	341	5	60943	3	127	7	027	26	141	3	457	8	837	4	597	4
377	8	339	3	56989	3	357	4	61001	40	181	5	089	6	153	3	481	40	849	4	637	4
401	24	351	30	57037	4	369	4	007	59	197	4	167	3	157	4	493	12	861	5	651	5
407	3	381	5	041	10	419	3	121	4	211	15	173	12	187	14	499	143	879	166	681	6
437	4	529	8	077	4	441	8	141	5	241	12	179	3	213	4	557	4	881	6	693	18
453	4	603	6	179	11	453	4	297	8	247	3	183	13	219	3	653	4	899	3	699	3
479	6	609	8	223	11	467	6	357	6	317	4	257	3	231	6	677	4	71933	4	751	10
53569	4	55621	27	57241	36	59497	3	61441	10	63331	3	65287	3	67261	5	69709	3	72019	3	73757	4

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
73771	15	75797	4	77719	6	79841	8	81701	25	83557	22	85243	6	87151	42	89071	6	91493	4	93053	172
849	4	853	4	743	3	861	3	727	3	561	20	297	8	181	15	101	3	529	8	077	4
877	4	967	3	761	60	889	8	769	4	563	6	303	3	211	513	237	4	541	5	103	3
883	34	991	6	773	4	987	6	773	4	597	4	331	7	253	4	293	4	573	4	133	36
897	3	75997	6	797	4	79999	6	817	7	609	14	333	4	277	4	413	4	591	6	151	5
951	10	76001	152	801	10	80021	5	853	6	641	8	361	4	281	10	477	4	621	5	169	12
73961	4	129	104	863	3	077	4	883	18	653	4	363	6	293	4	491	3	631	10	319	6
74047	3	213	6	893	6	107	6	929	8	689	6	369	12	317	4	563	6	639	6	337	8
077	4	231	14	899	3	173	612	931	15	701	5	411	5	421	5	653	6	703	13	371	5
093	4	243	6	929	102	207	17	953	13	717	4	447	47	491	13	671	14	733	4	491	5
101	5	253	4	933	4	209	48	967	3	719	6	517	4	517	4	681	20	757	4	493	4
201	10	333	4	77977	57	221	5	81973	12	737	9	531	3	541	3	689	4	781	5	523	6
287	3	369	16	78017	23	231	10	82009	36	761	6	597	4	553	8	809	16	801	24	529	4
311	6	441	8	031	5	233	8	013	14	773	4	601	4	557	4	849	4	807	3	553	8
357	4	481	8	041	8	239	6	021	5	791	90	639	3	583	3	909	133	837	4	557	4
383	7	493	4	049	16	263	3	037	4	813	4	669	3	589	3	923	6	867	6	601	10
441	40	537	9	079	26	287	3	051	5	857	8	691	205	613	12	959	6	909	9	701	5
449	22	543	3	121	18	317	36	129	6	869	87	717	6	631	6	89977	8	921	4	703	7
521	216	561	10	157	18	347	6	141	3	933	4	843	6	641	10	90017	97	939	3	761	16
561	10	579	3	163	6	449	24	183	3	83969	8	853	4	649	4	019	3	951	6	787	6
573	4	597	12	241	6	473	7	207	9	84061	5	889	32	679	18	031	6	957	12	809	4
611	9	603	6	277	12	557	14	219	3	067	3	933	4	691	3	053	4	91997	4	811	3
687	349	717	4	307	6	599	6	231	6	089	4	991	10	697	8	067	3	92041	30	893	4
719	6	753	8	401	8	629	3	237	28	127	3	85999	6	721	6	173	4	083	6	913	8
731	5	757	4	427	18	651	5	307	7	163	6	86029	3	751	6	187	6	107	14	937	8
761	8	801	24	487	3	671	10	351	6	181	5	083	6	767	7	191	10	111	122	941	11
779	3	831	6	541	5	677	4	373	4	211	5	113	9	793	8	217	21	119	26	967	3
797	4	837	4	569	4	681	20	393	8	229	3	143	49	853	4	247	3	173	12	971	5
827	6	847	7	571	5	713	9	471	6	247	3	161	4	877	4	281	40	203	6	979	3
861	197	963	6	583	3	749	9	483	6	317	4	171	5	881	20	289	6	233	7	93997	6
887	7	76991	10	643	6	849	4	499	13	391	6	179	3	917	4	397	108	311	6	94009	12
929	6	77017	8	649	6	911	186	507	6	437	44	209	12	943	3	401	10	317	6	033	8
933	4	023	11	697	8	917	6	531	3	463	3	263	3	961	40	407	17	333	4	063	3
74941	5	029	3	797	4	923	6	609	4	499	3	269	3	87973	3	469	7	353	8	111	10
75037	12	041	10	809	4	80929	8	613	4	503	23	287	3	88003	6	511	6	357	4	151	50
041	20	101	5	823	3	81001	12	651	5	521	8	293	34	007	79	583	3	387	14	153	8
109	3	137	8	853	4	013	12	699	3	533	4	323	6	037	4	619	11	401	14	201	30
161	4	141	5	877	18	031	6	721	4	551	10	357	4	069	3	631	114	413	18	219	3
181	7	167	3	889	38	071	10	723	6	649	8	371	5	093	36	641	10	431	6	253	4
211	3	191	30	893	4	077	4	727	133	653	4	453	4	117	6	679	714	461	5	291	3
277	12	201	50	929	4	101	5	729	6	697	8	461	15	211	5	841	6	479	6	321	12
289	8	213	4	78941	5	131	665	837	4	809	8	477	4	289	4	847	21	489	4	327	3
329	4	237	4	79111	10	157	12	889	4	811	3	531	5	321	12	901	3	551	6	351	34
389	47	239	14	159	6	197	4	891	3	913	8	533	6	327	7	931	7	557	4	397	4
401	200	249	4	201	12	203	22	939	3	961	40	573	4	463	11	90947	74	569	4	399	6
403	6	267	14	241	4	223	3	963	198	967	3	677	6	493	4	91009	6	623	3	421	5
431	10	269	3	337	211	281	4	82981	5	977	113	689	6	523	14	081	4	641	6	441	10
437	4	347	6	357	6	283	186	83059	3	84979	3	861	5	661	5	121	10	671	6	477	12
479	26	351	238	451	7	307	6	063	7	85021	5	869	57	663	3	129	4	681	56	529	4
511	18	359	6	493	4	331	3	077	4	027	6	923	11	681	6	151	10	683	6	541	5
533	4	369	8	561	4	401	88	227	22	049	8	929	8	729	6	237	6	717	4	543	3
577	8	471	122	601	4	421	15	231	82	061	5	951	94	741	45	291	3	737	7	561	32
611	5	509	3	609	6	439	14	233	8	081	30	959	6	771	15	303	3	801	8	573	18
619	9	521	16	621	5	517	12	257	8	091	5	969	8	807	19	331	5	821	85	597	4
629	7	551	6	633	8	551	10	311	30	093	4	86981	5	813	4	367	11	849	8	613	4
641	8	563	6	657	8	569	4	389	3	103	17	87013	4	843	6	381	3	857	8	621	15
653	4	569	6	687	19	637	4	401	8	121	32	037	12	873	7	387	18	863	7	687	3
709	27	641	6	693	4	649	4	431	6	201	8	041	8	88897	8	393	8	899	3	789	9
721	20	659	3	769	4	667	18	443	6	213	12	049	36	89009	4	397	4	941	15	837	4
773	4	689	4	777	9	677	4	449	18	229	11	121	18	041	4	411	5	92957	4	849	4
75781	9	77711	190	79801	152	81689	8	83477	4	85237	4	87133	12	89051	25	91453	6	93001	6	94889	8

p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q	p	q
94961	16	95589	8	95971	3	96601	20	96997	6	97369	6	97841	10	98317	12	98893	4	99317	4	99809	4
95089	4	561	4	96013	4	661	3	97001	40	397	4	861	7	321	8	899	3	349	17	828	3
093	4	569	48	097	3	731	5	003	18	423	3	879	6	323	6	98947	46	367	3	877	6
131	3	597	4	157	4	739	3	007	7	429	8	927	19	419	3	99013	12	397	6	881	40
213	4	617	9	181	5	769	32	021	15	561	120	961	4	491	3	041	4	401	14	99961	4
239	18	717	4	199	6	779	11	089	6	571	55	97973	4	533	14	089	4	409	6		
369	4	773	12	221	5	787	6	081	24	609	6	98041	6	597	4	133	4	431	10		
383	3	791	6	223	21	797	4	117	6	649	4	047	13	641	1370	149	7	469	3		
401	6	801	8	281	8	823	27	151	50	651	3	081	20	689	16	173	4	563	134		
443	6	813	4	289	8	847	3	169	4	687	3	101	9	711	10	191	26	571	5		
461	5	891	5	293	4	893	4	213	4	729	48	143	3	801	52	223	3	643	6		
471	10	917	12	337	3	911	22	281	14	777	3	213	4	809	4	241	8	721	10		
479	6	929	42	487	3	931	27	259	7	789	3	221	3	849	4	277	6	733	4		
95531	5	95957	28	96493	6	96979	7	97303	8	97813	12	98269	3	98887	3	99289	6	99787	6		